*Из наследия*
*А. А. Зиновьева*

# А. А. Зиновьев

# ОСНОВЫ ЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАУЧНЫХ ЗНАНИЙ

URSS

*Из наследия А. А. Зиновьева*

**А. А. Зиновьев**

# ОСНОВЫ ЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАУЧНЫХ ЗНАНИЙ

Вступительная статья
академика В. А. Лекторского

Издание второе,
исправленное и дополненное

URSS
МОСКВА

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследования научных знаний в рамках понятий и методов логики образуют логическую теорию научных знаний. В современной логике начало таким исследованиям было положено работами Фреге, Рассела, Льюиса, Лукасевича, Карнапа, Рейхенбаха, Тарского, Айдукевича и многих других ученых, ссылки на труды которых стали обычными в логико-философской литературе.

В данной книге дается более или менее систематичное построение той концепции логической теории научных знаний, которая по отдельным ее проблемам была намечена автором в ряде ранее опубликованных работ. Это построение охватывает лишь основы теории научных знаний. Так что книгу не следует рассматривать как учебное пособие или как изложение того, что вообще сделано в соответствующих разделах логики.

В отдельных деталях, ставших прописными истинами, излагаемая концепция в той или иной мере совпадает с концепциями других авторов. Но в целом и в наиболее существенных пунктах она принципиально от них отличается, в чем читатель сможет легко убедиться сам при желании осуществить соответствующие сравнения.

Основная цель книги — дать по возможности простое и систематизированное изложение самих идей и принципов, которые нам представляются перспективными для теории научных знаний. Поэтому изложение формального аппарата логики, который может быть развит на их основе, здесь сведено к необходимому минимуму.

Математическая логика одержала блистательную победу в теории научных знаний. Вместе с тем, в окололотических кругах успел сложиться предрассудок, будто математическая логика в том виде, как она обычно излагается в учебных пособиях (исчисление высказываний и предикатов с некоторыми дополнениями), представляет собою единственно возможный логический аппарат, пригодный для решения любых проблем теории научных знаний, если только последние нуждаются в логике. На самом же деле математическая логика в упомянутом объеме и виде есть лишь фрагмент теории научных знаний, к которому нельзя свести многие другие ее разделы и который не учитывает всего действительного разнообразия логических форм и их взаимоотношений. В частности, это касается теории терминов, форм логического следования, силлогистики, физического следования и других разделов логики, которым в книге отведено преимущественное место.

# ЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НАУЧНЫХ ЗНАНИЙ (ВВЕДЕНИЕ)

## § 1. Научные знания

Наука есть особая сфера разделения труда человечества, задачей которой является производство (приобретение, получение) знаний и изобретение новых средств для этого. Научные знания суть знания, производимые в науке.

С логической точки зрения научные знания можно отличить от вненаучных (от получаемых вне сферы науки) лишь тогда, когда берутся сложные формы знаний и методы их приобретения, для овладения которыми нужна профессиональная подготовка и которые вне сферы науки не встречаются в силу отсутствия соответствующих навыков и целесообразности. Но в науке фигурируют и простые формы знаний и методы их получения, которые с логической точки зрения ничем не отличаются от форм и методов, фигурирующих вне ее. Так что изучение научных знаний в рамках логики есть изучение знаний вообще, включая такие их формы и методы получения, которые встречаются лишь в науке.

## § 2. Основные абстракции

Исследование научных знаний в рамках логики опирается на ряд абстракций и допущений, накладывающих определенные ограничения на его возможности.

Все социальные, психологические и прочие связи, внутри которых происходит получение, сохранение и использование знаний, здесь оставляются без внимания. Знания рассматриваются исключительно как информация о той или иной предметной области, лишь как отображение последней. Предполагается, что чувственный аппарат отражения необходим для получения, хранения и использования знаний. Но деятельность его не рассматривается. Здесь не играет роли все то, что происходит в мозгу и вообще в организме человека (внутри любого отражающего существа или устройства). Знания берутся исключительно как воспринимаемые (видимые, слышимые, осязаемые) предметы особого рода (как особого рода вещи) и как пространственно-временные структуры из таких предметов. Не рассматриваются также те средства познания (приборы, орудия эксперимента), которые дополняют и усиливают чувственный аппарат отражения и обеспечивают возможность наблюдения изучаемых предметов.

Результаты познания фиксируются прежде всего в предложениях того или иного языка. На этой основе в науке изобретаются дополнительные средства — формулы, схемы, графики, таблицы и другие конструкции, включаемые в язык науки. Здесь все они сводятся к форме предложений. Суть этой абстракции состоит в том, что всякой языковой конструкции, фиксирующей знание, ставится в соответствие некоторое множество предложений, адекватное ей с точки зрения содержащейся в ней информации. Эта абстракция соответствует тому, что у имеющего дело с наукой человека есть навык пользоваться различными языковыми конструкциями (графиками, таблицами и т. п.), умение «читать» их в предложениях обычной речи.

Предложения сводятся к стандартизированной форме — к форме высказываний (суждений). Эта абстракция соответствует тому, что занимающийся наукой человек умеет в каждом предложении выделить его логические (описываемые в терминах логики) структурные элементы и их взаимное расположение, т. е. умеет установить логическую структуру предложений. Абстракция эта имеет смысл в отношении к любому языку, но всегда в отношении к какому-то данному языку. При этом необходимо отвлечься от тех ассоциаций, которые навязываются правилами того или иного языка как русского, английского, французского и т. п. языка, и рассматривать логическую структуру предложений как нечто не зависящее от упомянутых правил.

## § 3. Три аспекта исследования знаний

Научные знания можно рассматривать в трех различных аспектах — структуры, получения (построения) и значения. Каждый из них имеет свои особенности, описываемые в особой системе понятий. В первом из них обнаруживаются все те предметы, которые изучаются в логической теории научных знаний, т. е. выделяются сами знания, выделяется воспринимаемое расчленение их на части и упорядоченность последних в пространстве и времени. Эти предметы суть термины, логические знаки «и», «или», «если..., то...», «тот, который», «все» и т. д., различные виды структур из терминов и логических знаков, сложные комплексы высказываний и терминов.

Во втором аспекте выделяются способы получения знаний, их частей и совокупностей. Здесь рассматриваются действия, посредством которых приобретаются знания и образующие их части (индукция, дедукция, моделирование, определение, экстраполяция, интерполяция и т. п.). Поскольку происходит отвлечение от чувственного отражения, рассматриваются только способы получения высказываний и терминов из высказываний и терминов. Приходится, естественно, допускать в каждой области науки некоторое множество терминов и высказываний, получаемых без использования других терминов и высказываний или заимствуемых в готовом виде из других сфер познания. Наблюдение и эксперимент здесь берутся лишь в той мере, в какой они поставляют высказывания. Одна из важнейших проблем здесь — выявить элементарные формы знания, дать точное описание их свойств, представить всякое знание как построенное из более простых (в конечном счете — элементарных) знаний по определенным более или менее общим правилам, т. е. описать стандартные способы построения знаний сложных форм из элементарных. В третьем аспекте выделяется отношение знаний и их частей к тем предметным областям, отображением которых они должны служить, изучаются те основания, в силу которых знания и образующие их структурные элементы принимаются в науке; в частности, выясняются способы проверки знаний и установления значения терминов. Здесь фигурируют такие понятия, как «значение», «смысл», «истинно», «ложно», «точно», «подтверждение» и т. п., которые обычно называют семантическими.

Названные аспекты до какой-то степени могут быть обособлены, поскольку жесткой однозначной связи между ними нет: знания с одинаковой структурой могут получаться разными способами, а с различной структурой — одинаковыми; полученные разными способами знания могут проверяться одинаково, а полученные одинаковыми — различно; знание может быть получено одним способом, а проверено другим и т. п. Но достаточно детальное и систематическое исследование в каждом из них невозможно без соответствующих исследований в других. Дело в том, что для описания свойств логических знаков, входящих в структуру высказываний, надо указать условия их употребления, т. е. указать, как получаются высказывания с такими знаками и что может быть получено из них; понятия «истинно», «ложно» и т. п. определяются различно для различных структур высказываний; некоторые структуры высказываний невозможно различить без ссылок на способы построения или проверки; каждой структуре высказываний и терминов соответствует некоторое множество способов, с помощью которых могут получаться высказывания и термины с такой структурой; описание оснований, в силу которых термины и высказывания принимаются в науке, есть ретроспективное описание возможных способов их построения, так что аспект значения в какой-то мере есть семантически перефразированный аспект построения. Одним словом, соединение названных аспектов есть необходимое условие исследования научных знаний, а не только нечто допустимое (поэтому нашу концепцию логики можно назвать комплексной логикой).

## § 4. Интуиция

Исследовать научные знания — значит прежде всего исследовать те практические навыки людей по получению и оперированию знаниями, которые сложились в истории познания (и каким-то образом усваиваются исследователями в процессе их индивидуального формирования). Эти навыки не являются чем-то данным от природы. Они изобретены людьми и изобретаются вновь вместе с прогрессом науки. У тех, кто этими навыками обладает, складывается некоторое (более или менее ясное и определенное) практическое или интуитивное понимание свойств знаний. Это понимание знаний есть необходимый элемент самих навыков оперирования ими. Фиксирование его образует отправной пункт логики как особой науки и линию соприкосновения ее первоначальных результатов с познавательной деятельностью людей.

Но интуитивное понимание, о котором здесь идет речь, складывается стихийно со всеми вытекающими отсюда последствиями — неясность, неустойчивость, наличие вариаций, фрагментарность и т. п. И логика должна приложить известные усилия, чтобы сделать его явным и недвусмысленным, устранить смешение различных форм знаний, осуществить некоторую стандартизацию и т. д.,— чтобы эксплицировать его. А это не есть просто запись того, что общепринято и общеизвестно. Это есть продолжение стихийной деятельности людей по изобретению и усовершенствованию логических средств языка, но уже на профессиональном уровне. Логика с самого начала своего существования и в самой своей основе уже создает нечто новое сравнительно с тем, что известно в интуиции.

Из сказанного следует: логическая теория научных знаний должна учитывать интуитивное понимание тех или иных сторон познавательной деятельности людей, но не должна быть его рабом. Она должна допускать возможность отхода от интуиции. Выяснение того, в какой мере и в какой форме этот отход допустим и даже необходим, есть одна из ее задач.

## § 5. Логические исчисления

Существенное место в логической теории научных знаний в наше время занимает использование логических исчислений (формальных построений). Это использование идет по двум линиям. Первая из них — экспликация каких-то элементов интуиции. При этом имеют место интуитивное понимание каких-то видов знаний, логическое исчисление и интерпретация второго, устанавливающая его соответствие с первым. Если непосредственного совпадения не получается, то исчисление либо приспосабливается к интуитивным предпосылкам путем введения дополнений, ограничений и т. п., либо строится с таким расчетом, чтобы указанное соответствие имело место. Получающиеся таким методом теоретические построения дают решение лишь отдельных проблем, причем — решение частичное и порой с «парадоксальными» (не соответствующими интуитивному пониманию) следствиями, что не отвергает их познавательной ценности (возможность использования дедукции и предвидения, доказательность, экспликация понятий, исключение двусмысленности, простота и т. п.).

По второй линии логические исчисления рассматриваются независимо от интуиции, как нечто вновь изобретенное логикой в дополнение к тем логическим средствам, которые уже выработаны в науке. В обоих случаях возникает комплекс проблем, входящих в проблематику логической теории научных знаний.

Таким образом, логическая теория научных знаний не есть какая-то особая наука, отличная от логики и существующая наряду с ней. Она есть лишь часть (или аспект) логики, благодаря которой формальный аппарат логики расценивается как аппарат именно логики, а не какой-либо иной науки. Она выявляет основу, на которой вырастает этот аппарат, направления, по которым возможна его разработка, и пути использования его для описания и усовершенствования языка науки.

## § 6. Обычный и научный язык

Эмпирически данный материал, наблюдение которого образует отправной пункт логической теории научных знаний, есть язык науки. Последний базируется на обычном языке и не может существовать без последнего в качестве языка: уничтожение обычного языка привело бы к уничтожению и языка науки (он стал бы непонятным).

Граница между научным языком и обычным языком относительна, исторически условна. Часть терминов и высказываний из научного языка переходит в обычный. С другой стороны, многие термины и высказывания обычного языка используются в науке. С помощью обычного языка вводятся специальные термины науки, разъясняется смысл ряда научных высказываний. Навыки построения терминов и высказываний в обычном языке используются для тех же целей в научном языке и т. д. Однако выделение научного языка в качестве надстройки над обычным языком имеет смысл как абстракция в рамках логики. Дело в том, что обычный язык формируется и усваивается как элемент очень сложного комплекса связей, в которые включена эволюция человечества и каждого отдельного человека. Складывающиеся здесь знания и способы их получения и усвоения лишь в незначительной мере поддаются описанию в понятиях одной только логики. Допуская здесь, что обычный язык дан, мы тем самым допускаем какие-то термины и высказывания и какие-то способы их получения как не подлежащие дальнейшему логическому анализу (допускаем какие-то «дологические» или «внелогические» средства получения знаний).

Логическая теория научных знаний, таким образом, ограничена не только «сверху» (сведение любых форм знаний к совокупностям высказываний), но и «снизу»: она оставляет без внимания все те средства и условия познания, которые связаны с оперированием обычным языком и не поддаются описанию в понятиях логики.

## § 7. Объективность подхода

Деятельность исследователя по получению знаний можно рассматривать двояко: 1) субъективно, т. е. в том виде, как она переживается самим исследователем; 2) объективно, т. е. в том виде, как ее можно наблюдать со стороны (фиксируя лишь то, что можно видеть, слышать и т. д.).

Субъективный подход к знаниям в свое время был распространен в логике. Выражением его была психологизация логики. В современной логике психологизм утратил какое бы то ни было значение. Но время от времени он дает знать о себе, в особенности — когда логики высказываются по вопросам, непосредственно не затрагивающим формальный аппарат логики. От него трудно избавиться, поскольку каждый нормальный человек наделен способностью к самонаблюдению и убежден в наличии у себя и у других людей некоей «внутренней», «духовной», «идеальной» и т. п. жизни.

Мы будем излагать чисто объективную точку зрения на знания. Совершенно очевидно, что понятия «идеальное», «духовное», «мысленное» и т. п., обычно употребляемые в случае субъективного подхода, утрачивают при этом практический смысл, поскольку сами знания рассматриваются как нечто ощутимое. Даже в тех случаях, когда предметами знаний являются несуществующие и, следовательно, неподдающиеся наблюдению предметы, сами знания должны быть доступны наблюдению. В противном случае они отсутствуют.

Объективный подход к знаниям реализуется в том, что мы (автор и читатель) будем допускать некоего Исследователя (т. е. того, кто эти знания получает и оперирует с ними), познавательную деятельность которого мы можем наблюдать и в известных пределах полностью контролировать. Упомянутое «в известных пределах» означает, что мы будем приписывать Исследователю определенные свойства и способности и затем рассматривать, что он должен сделать, чтобы решить ту или иную задачу познания. В дальнейшем ссылки на Исследователя обычно будут опускаться из чисто литературных соображений. Но они могут быть легко восстановлены. В качестве исследователя может иметься в виду не только человек, занимающийся наукой, но вообще любое существо или сооружение, способное осуществлять все то, что мы будем допускать в том или ином случае.

## § 8. Технические замечания

Чтобы сделать некоторые формулировки по возможности компактнее и обозримее, будем употреблять символы

$$\cdot,\ :,\ \sim,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

в следующем смысле:

1) $X \cdot Y$ — «$X$ и $Y$», «Каждое из $X$, $Y$»; $X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n$ — «$X^1$ и $X^2$ и ... и $X^n$», «Каждое из $X^1, \ldots, X^n$»; здесь и ниже $X, Y, X^1, \ldots, X^n$ суть какие-то утверждения;

2) $X : Y$ — «Либо $X$, либо $Y$», «$X$ или $Y$», «Одно и только одно из $X$, $Y$»; $X^1 : X^2 : \ldots : X^n$ — «Либо $X^1$, либо $X^2$, ..., либо $X^n$», «Одно и только одно из $X^1, X^2, \ldots, X^n$»;

3) $\sim X$ — «Не-$X$», «Не так, как утверждается в $X$»;

4) $X \rightarrow Y$ — «Если $X$, то $Y$»;

5) $X \leftrightarrow Y$ — «$X$, если и только если $Y$»; сокращение для $(X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow X)$.

В дальнейшем мы дадим уточнение знаков «и», «или» («либо») и «не». Но до того времени будем предполагать, что смысл их в той мере, в какой это необходимо для понимания излагаемого материала, известен читателю. Аналогично для знаков «если, то», «если и только если» и т. п. Одним словом, мы допускаем, что читатель уже имеет какие-то навыки оперирования логическими средствами языка, владеет каким-то логическим минимумом.

Определения и утверждения будем нумеровать символами $Di$, $Ai$ и $Ti$, где $i$ есть порядковый номер определения или утверждения в том или ином параграфе, $A$ означает, что утверждение принимается как аксиома, а $T$ — что утверждение может быть получено как следствие из аксиом. При ссылках на них после $i$ будем записывать номер главы и параграфа. Например, $T3V7$ будет означать третье утверждение из седьмого параграфа пятой главы.

# Глава вторая

# ЗНАКИ

## § 1. Предмет

Слово «предмет» мы будем употреблять в самом широком смысле: предмет — все то, что может быть как-то воспринято, представлено, названо и т. п., короче говоря — все, что угодно. Предметы будем изображать символами

$$П, П^1, П^2, П^3, \ldots .$$

Каждый из этих символов по отдельности будет обозначать любой (безразлично, какой) или какой-то (что будет ясно из контекста) предмет. Различие же совместно взятых символов предметов будет означать лишь то, что предметы как-то различаются (не обязательно по наличию или отсутствию каких-то воспринимаемых или допускаемых свойств; возможно, по положению в пространстве и времени). Умение различать и отождествлять предметы п дполагается данным.

## § 2. Выбор

Будем считать, что исследователь выбрал некоторый предмет, если каким-то образом «сосредоточил на нем свое внимание». При этом он осуществляет два действия:

1) создает или воспроизводит чувственный образ предмета (видит, слышит, представляет, воображает и т. д. его), употребляет его название, что-то высказывает о нем, создает или изучает его схему, рисунок, фотографию и т. д.;

2) осуществляет какое-то дополнительное действие, обнаруживающее или подтверждающее, что он на какое-то время и с какой-то целью останавливает свое внимание

именно на этом предмете, оказывает ему какое-то предпочтение перед другими предметами, в отношении которых в данном временном интервале точно так же выполнялось указанное в первом пункте действие.

Мы рассматриваем выбор предмета как элементарное действие, всякой познавательной деятельности. В рамках логической теории научных знаний оно не анализируется. Термин «выбор» принимается как первичный разъясняемый лишь на уровне обычного языка и с помощью примеров. Так, исследователь выбирает электрон, разглядывая его следы на фотопластинке; выбирает флогистон, утверждая в каком-то контексте, что флогистон не существует; выбирает тройку чисел $x$, $y$ и $z$, рассматривая равенство $x^2 + 3xy = 2z$ и т. д. Выбор предмета всегда локализован во времени: имеет начало и конец; интервал времени, в течение которого предмет считается выбранным данным исследователем, больше нуля. Это означает, что выбор предмета при всех обстоятельствах (как бы он не осуществлялся) есть какое-то состояние исследователя, точнее — состояние его природного аппарата отражения.

## § 3. Сопоставление

Если исследователь осуществляет выбор двух или более различных предметов, будем говорить, что он сопоставляет эти предметы (или осуществляет их сопоставление). Сопоставляемые предметы могут быть выбраны одновременно или один за другим. Но всегда имеется интервал времени, когда все они считаются выбранными исследователем, осуществляющим их сопоставление,— акты выбора локализованы во времени. Сопоставление предметов есть, очевидно, совокупность из двух и более различных актов выбора, и последние как-то упорядочены. Например, построив высказывание «Вода образуется путем соединения кислорода и водорода», исследователь выбрал предметы воду, кислород и водород; упорядоченность актов выбора выражена в последовательности их названий в высказывании; локализованность актов выбора выражена в том, что построено высказывание, относящееся к трем выбранным предметам и воспринимаемое как нечто целое. Сопоставляемые предметы могут быть выбраны и независимо друг от друга.

## § 4. Соответствие

*D1.* Будем говорить, что исследователь установил соответствие предмета $\Pi^2$ предмету $\Pi^1$ (или что предмет $\Pi^2$ соответствует предмету $\Pi^1$), если и только если имеет место следующее: каждый раз, когда исследователь выбирает $\Pi^1$, он вслед за этим выбирает $\Pi^2$, будучи поставлен перед альтернативой выбирать или не выбирать $\Pi^2$. Соответствие предмета $\Pi^2$ предмету $\Pi^1$ будем изображать символом

$$\Pi^2 \Leftarrow \Pi^1,$$

а его отсутствие — символом

$$\sim(\Pi^2 \Leftarrow \Pi^1).$$

Выражение «вслед за этим» в *D1* означает лишь то, что выбор $\Pi^2$ осуществляется после выбора $\Pi^1$. Выражение «будучи поставлен перед альтернативой ...» можно пояснить так: 1) мы подбираем определенным образом некоторое множество предметов, среди которых имеется $\Pi^2$, и заставляем исследователя выбрать какой-то один из них; это проделываем несколько раз; подбираемое множество можем варьировать; 2) мы можем допустить, что исследователь одновременно с выбором предмета осуществляет какое-то действие, подтверждающее, что выбор сделан, заставить исследователя выбрать $\Pi^2$ и ожидать подтверждающего действия.

Если установлено соответствие одного предмета другому предмету, то это не означает, что они всегда выбираются совместно. Каждый из них может быть выбран и независимо от другого (без выбора другого). Более того, если такая возможность отсутствует, то ни о каком соответствии и речи быть не может.

Мы определили простейший случай соответствия. Через него определяются другие его формы:

*D2.* $\Pi^1$ и $\Pi^2$ взаимно соответствуют друг другу (имеет место их взаимное соответствие), если и только если

$$(\Pi^1 \Leftarrow \Pi^2) \cdot (\Pi^2 \Leftarrow \Pi^1).$$

*D3.* $\Pi^2$ однозначно соответствует предмету $\Pi^1$, если и только если

$$(\Pi^2 \Leftarrow \Pi^1) \cdot \sim(\Pi^3 \Leftarrow \Pi^1),$$

где $\Pi^3$ есть любой предмет, отличный от $\Pi^2$.

*D4*. $П^1$ и $П^2$ взаимнооднозначно соответствуют друг другу, если и только если первый однозначно соответствует второму, а второй — первому.

Если имеет место

$$(П^2 \Leftarrow П^1) \cdot (П^3 \Leftarrow П^1)$$

$$(П^2 \Leftarrow П^1) \cdot (П^2 \Leftarrow П^3)$$

$$(П^2 \Leftarrow П^1) \cdot (П^3 \Leftarrow П^1) \cdot (П^2 \Leftarrow П^4),$$

то говорят об одно-многозначном, много-однозначном и много-многозначном соответствиях.

Обращаем внимание на то, что в случае $П^2 \Leftarrow П^1$ создаются какие-то условия, при которых вслед за выбором $П^1$ осуществляется выбор $П^2$. Это вовсе не означает того, что в случае $П^1 \Leftarrow П^2$ имеют место или создаются те же самые условия. Как раз наоборот: здесь должны быть созданы какие-то другие условия (что очевидно хотя бы из того, что иной порядок выбора предметов). Это не означает также того, что те же условия имеют место в случае $П^3 \Leftarrow П^2$ или $П^1 \Leftarrow П^3$.

Из определений видно, что соответствие есть способность выбирающего осуществлять определенные действия — выбирать строго определенные предметы вслед за выбором других предметов, если сложились условия, заставляющие делать выбор. Принцип транзитивности для соответствия не имеет силы, поскольку в условной форме оно имеет вид «Если выбирается $П^1$ и требуется выбрать какой-то предмет из некоторого множества предметов, то выбирается $П^2$», но не «Если выбирается $П^1$, то выбирается $П^2$».

С точки зрения соответствия предметы выступают как неизменные и не влияющие друг на друга (или их изменения и взаимные влияния не принимаются во внимание). Соответствие вообще устанавливается между устойчивыми и с практической точки зрения не влияющими друг на друга предметами. Иначе оно теряет смысл и становится практически неосуществимым.

Случай $П \Leftarrow П$ исключается, поскольку по определению для установления соответствия необходимы два различных предмета. Если предметы $П^1$ и $П^2$ не различаются исследователем как экземпляры предметов одного и того же вида, они различаются по их положению в пространстве или времени. Иначе понятие соответствия теряет какой бы то ни было практический смысл.

Соответствие предметов не имеет ничего общего с причинной связью предметов. Причинная связь предметов не зависит от того, познает их некоторый исследователь или нет, а соответствие не существует без отражения предметов исследователем (оно устанавливается по его воле и есть его собственное свойство). В случае причинной связи интерес представляет зависимость существования и наличия свойств одних предметов от существования и наличия свойств других. В случае соответствия это исключается в той мере, в какой это необходимо для идентификации (узнавания) предметов. Исследователь может установить соответствие между предметами, находящимися в причинной связи, или найти какие-то причинные связи между предметами, находящимися в соответствии. Но это не отменяет того, что сказано выше.

Соответствие устанавливается как решение исследователя считать, что один предмет соответствует другому (и совершать определенные поступки в подходящих условиях вследствие этого своего решения), как стихийно сложившаяся привычка, как навязанная другими исследователями необходимость и т. п. Но во всех случаях это есть образование у исследователя способности осуществлять определенные действия, и не более того.

## § 5. Знак

*D1*. Если $П^1$ специально используется (создается, отбирается, воспроизводится) исследователем для того, чтобы находиться во взаимном соответствии с $П^2$, то будем $П^1$ называть знаком для $П^2$, а $П^2$ — обозначаемым для $П^1$. Будем также употреблять выражения «$П^1$ обозначает предмет $П^2$» и «$П^2$ обозначается знаком $П^1$».

Знаки будем изображать символами

$$З, З^1, З^2, З^3, \ldots .$$

Каждый из этих символов по отдельности будет изображать любой знак, а различие совместно употребляемых символов — лишь то, что знаки могут как-то различаться.

Знаки различаются или не различаются физически, т. е. по их воспринимаемому виду. Если знаки считаются физически тождественными, они суть экземпляры (повторения, воспроизведения) одного и того же знака (*D2*).

Из определения знака следует: если некоторый предмет есть знак, то может быть выбран какой-то другой предмет, находящийся с ним во взаимном соответствии. Условимся, что такими предметами для З, $З^1$, $З^2$, ... являются соответственно предметы П, $П^1$, $П^2$, ..., если не оговорено что-либо другое.

Образование знака (т. е. будет некоторый предмет знаком или нет) всецело зависит от исследователя, от его волевого решения. А если имеется в виду множество из двух или более различных исследователей, то помимо решения одного из них считать некоторый предмет знаком требуется согласие на это других, т. е. аналогичное решение других.

Знаки имеют какие-то свойства кроме того, что находятся в соответствии с обозначаемыми. На роль знаков отбираются удобные предметы, а не любые. Со временем лишь определенного вида предметы становятся знаками-профессионалами. Но в качестве знаков они берутся исключительно с точки зрения их места и роли в соответствии. Знаки должны непосредственно восприниматься теми, для кого предназначены. Из понятия соответствия вытекает, что знаки неизменны в их функции знаков.

Предметы становятся знаками не в силу каких-то причин, заложенных в них самих, а по воле и желанию исследователей. Знаки отличаются от чувственных образов предметов: последние суть состояния исследователя, суть состояния его природного отражательного аппарата, тогда как первые суть предметы, находящиеся вне исследователя, существующие наряду с ним, отделимые от него. Они играют определенную роль в жизни и деятельности исследователя, создаются и используются им, но не являются его собственными состояниями. Совокупность знаков и правил оперирования ими образует знаковый (или искусственный) аппарат отражения. Очевидно, он невозможен без природного (естественного, чувственного) аппарата отражения.

Из определения соответствия и знака следует, что предмет не может быть знаком самого себя. Но имеются случаи, когда различение обозначаемых и их знаков является делом довольно тонким и запутанным. В частности, это имеет место тогда, когда знаки рассматриваются сами как особые предметы (а не в их функции знаков), а для обозначения их при этом используются сами эти знаки. Еще менее заметно различие знаков и обозначаемых в тех случаях, когда в качестве знака для предметов некоторого рода может быть выбран представитель этого же рода (например, в качестве знака для чисел 1, 1, I, I, «один», «единица» и т. д. может быть выбрано любое из этих чисел, так, что сами числа оказываются экземплярами своего собственного знака). Мы допускаем, что различие знаков и обозначаемых во всех случаях может быть строго установлено.

## § 6. Значение знака

*D1.* Значением данного знака будем считать тот факт, что он находится в соответствии с какими-то предметами, и есть способ выяснить, с какими именно. Это может быть указание на воспринимаемые предметы, описание предметов совокупностью слов, изображение жестами и рисунками, анализ понятий, высказываний и вообще какого-то контекста (но все это касается способов установления значения, и фиксировать это в самом определении значения, как это очень часто делают, совершенно бессмысленно).

Знак имеет значение для данного исследователя, если он может каким-то способом выбрать из множества предметов (выделить чувственно или описать с помощью других имеющих значение знаков) по крайней мере один такой, который находится в соответствии с этим знаком. Если он осуществить это не в состоянии, знак для него не имеет значения. И тогда он вообще для него не знак. Выражение «знак не имеет значения» равносильно выражению «то, что исследователь считал знаком, не есть знак», а выражение «знак имеет значение» — выражению «это есть знак».

Такие выражения фигурируют лишь постольку, поскольку на роль знаков выдвигаются предметы определенного вида, и привычка связывать термин «знак» не только с функцией предметов, но и с их воспринимаемым видом, приводит к тому, что знаками начинают называть и знакоподобные предметы (какие-то линии на бумаге, звуки и т. п.).

## § 7. Отношения знаков

*D1.* Знак $З^1$ включается по значению в $З^2$, если и только если любой предмет, обозначаемый $З^2$, обозначается $З^1$. Сокращенно будем это записывать символом

$$З^1 \rightharpoonup З^2.$$

Отрицание будем записывать символом

$$\sim(З^1 \rightharpoonup З^2).$$

*D2.* Знаки $З^1$ и $З^2$ тождественны по значению, если и только если

$$(З^1 \rightharpoonup З^2)\cdot(З^2 \rightharpoonup З^1).$$

Сокращенно будем это записывать символом

$$З^1 \rightleftharpoons З^2.$$

Отрицание будем записывать символом

$$\sim(З^1 \rightleftharpoons З^2).$$

*D3.* Область значения З есть множество всех возможных знаков, в каждый из которых он включается по значению. Другими словами, если $З \rightharpoonup З^i$, то $З^i$ есть элемент области значения З.

*A 1.* $(З^1 \rightharpoonup З^2)\cdot(З^2 \rightharpoonup З^3) \rightarrow (З^1 \rightharpoonup З^3)$.

*A2.* Если каждый элемент области значения $З^2$ есть элемент области значения $З^1$, то $З^1 \rightharpoonup З^2$.

Следствия *A1*, *D2* и *D3*:

*T 1.* $З \rightharpoonup З$, $З \rightleftharpoons З$

*T 2.* $(З^1 \rightleftharpoons З^2)\cdot(З^2 \rightleftharpoons З^3) \rightarrow (З^1 \rightleftharpoons З^3)$

*T3.* Если $З^1 \rightharpoonup З^2$, то каждый элемент области значения $З^2$ есть элемент области значения $З^1$.

Другие отношения знаков укажем ниже при рассмотрении терминов как частного случая знаков.

## § 8. Простые и сложные знаки

*D1.* Знак З является структурно сложным, если его частями являются знаки $З^1, \ldots, З^n$ $(n \geqslant 2)$ такие, что $\sim(З^i \rightleftharpoons З)$, где $З^i$ есть любой из $З^1, \ldots, З^n$, и $\sim(З^i \rightharpoonup З^k)$, где $З^i$ и $З^k$ есть любая пара из $З^1, \ldots, З^n$; если З не содержит таких частей, то он является структурно простым.

При образовании сложных знаков из простых обычно происходит изменение последних, так что требуется некоторый навык для установления того, из каких знаков построен данный сложный знак. Мы допускаем наличие такого навыка, что равносильно допущению того, что сложный знак есть упорядоченная во времени и пространстве совокупность четко локализованных знаков. Если вид знаков при соединении их в сложный знак меняется настолько, что теряется физическое тождество с отправным материалом, то должны быть приняты соглашения об отношении значений исходных знаков и их модификаций в составе сложного знака как физически различных знаков.

Простые знаки соединяются в сложные по каким-то правилам, и в сложном знаке имеется нечто такое, что указывает на них: это — близость и порядок знаков в пространстве и времени, а также какие-то дополнительные предметы, образующие с соединяемыми знаками некоторое физическое целое. Последние мы будем называть коннекторами знаков (*D2*). Мы здесь допускаем наличие навыков правильного употребления этих коннекторов (допускаем, что свойства их известны). Допускаем также, что если встречаются случаи, когда одного только пространственно-временнóго расположения простых знаков достаточно для образования нового знака, то для этих случаев всегда может быть найден какой-то предмет, играющий роль коннектора и не меняющий значения знака. Так что соединение двух простых знаков в новый знак будет рассматриваться всегда как соединение посредством коннектора. Очевидно, соединение трех простых знаков в один знак потребует двух коннекторов и т. д. Сказанное можно обобщить на любые знаки.

Знаки, которые образуются путем соединения других знаков, можно разбить на две группы:

1) знаки, значение которых известно, если известно значение знаков, из которых они построены;

2) знаки, значение которых невозможно установить, если известно только значение знаков, из которых они построены. В обоих случаях правила соединения знаков (в том числе — свойства коннекторов) предполагаются известными. Например, слова «килограммометр» и «динамометр» построены каждый из двух различных слов. Но первое означает результат некоторых операций измерения и умножения величин, а второе — прибор для измерения некоторых величин. И это их значение невоз-

можно установить, если известны только значения их составных частей и соответствующее правило словообразования.

Таким образом, надо различать:

1) правила соединения знаков в новые знаки, не зависящие от особенностей тех или иных знаков как материальных тел и позволяющие получать знаки первой группы;

2) правила соединения знаков как особых материальных тел (звуков, линий на бумаге и т. п.).

Приведенные выше в примере слова построены по одному и тому же правилу русского языка (по правилу второй группы), но они не являются знаками, построенными по правилам первой группы.

Учитывая сказанное, внесем дополнение к *D1*:

1) для установления значения сложного знака достаточно знать значение всех входящих в него простых знаков и свойства всех входящих в него коннекторов;

2) если таким способом значение некоторого данного знака установить нельзя, он принимается как простой по структуре.

Структурно сложные знаки будем изображать символами

$$\{\alpha;\ З^1, \ldots,\ З^n\},$$

где $З^1, \ldots, З^n$ ($n \geqslant 2$) суть знаки (не обязательно простые), а $\alpha$ означает, что эти знаки соединены в один знак какими-то коннекторами. Будем говорить, что $З^i$ ($i = 1, \ldots, n$) входит (есть вхождение) в некоторый знак, если и только если последний есть знак $\{\alpha;\ З^1, \ldots,\ З^n\}$ или $З^i$ (*D2*). Знак, который может быть образован из $З^1$ путем замены знака $З^2$ знаком $З^3$ везде, где $З^2$ входит в $З^1$, будем изображать символом

$$З^1\,(З^2/З^3).$$

В качестве сокращения для

$$((З\,(З^1/З_1))\ldots)\,(З^n/З_n)$$

будем употреблять символ

$$З\,(З^1, \ldots,\ З^n/З_1, \ldots,\ З_n).$$

*A 1.* $(З^1 \rightharpoonup З^2) \rightarrow (З^3 \rightharpoonup З^3\,(З^1/З^2))$

*T 1.* $(З^1 \rightleftharpoons З^2) \cdot (З^3 \rightleftharpoons З^4) \rightarrow (З^1\,(З^3/З^4) \rightleftharpoons З^2\,(З^3/З^4))$

*T 2.* $(З^1 \rightleftharpoons З^2) \rightarrow (З^3 \rightleftharpoons З^3\,(З^1/З^2)).$

## § 9. Смысл знака

*D1*. Смысл простого знака есть его значение; смысл $\{\alpha; З^1, \ldots, З^n\}$ состоит в том, что он построен из знаков $З^1, \ldots З^n$ с помощью коннекторов $\alpha$, и смысл их известен.

*T1*. Структурно простой знак имеет (не имеет) смысл, если имеет (не имеет) значение; структурно сложный знак имеет смысл, если каждый из входящих в него знаков имеет смысл (правила построения соблюдены), и не имеет смысла, если по крайней мере один из входящих в него знаков не имеет смысла. Другими словами, исследователю известен смысл знака, если и только если известны значения всех входящих в него простых знаков и свойства всех коннекторов.

Тождество знаков $З^1$ и $З^2$ по смыслу будем изображать символом

$$З^1 \equiv З^2,$$

а его отсутствие — символом

$$\sim (З^1 \equiv З^2).$$

Тождество знаков по смыслу определяется утверждениями: *A1*. Если $З^1$ и $З^2$ суть структурно простые знаки, то

$$(З^1 \equiv З^2) \leftrightarrow (З^1 \rightleftharpoons З^2)$$

(структурно простые знаки тождественны по смыслу, если и только если они тождественны по значению).

$$A2. \quad (З^1 \equiv З^1 \ (З^2/З^3)) \leftrightarrow (З^2 \equiv З^3).$$

Согласно *A2* вопрос о том, тождественны или нет два данных знака по смыслу, сводится к вопросу о тождестве и различии по смыслу входящих в них простых знаков. При этом предполагается, что оба знака построены по одним и тем же правилам логики.

*T1*. $(З^1 \equiv З^2) \rightarrow (З^1 \rightleftharpoons З^2)$

*T2*. $\sim ((З^1 \rightleftharpoons З^2) \rightarrow (З^1 \equiv З^2))$

*T3*. $(З^1 \equiv З^2) \rightarrow (З^3 \equiv З^3 (З^1/З^2))$

*T4*. $(З^1 \equiv З^2) \cdot (З^2 \equiv З^3) \rightarrow (З^1 \equiv З^3).$

Утверждения *T1* и *T2* означают, что тождественные по смыслу знаки тождественны по значению, но не всегда наоборот. Например, при определении структурно простого знака $З^1$ через структурно сложный знак $З^2$ мы договариваемся считать $З^1$ и $З^2$ тождественными по значению, но смысл их не одинаков потому, что один из них простой, а другой — сложный.

Известные парадоксы типа парадоксов, связанных с выражениями «Вечерняя звезда» и «Утренняя звезда», суть результат смешения различных знаков. Если нам известно только то, что эти выражения суть сложные знаки, построенные из знаков «Вечерняя», «Утренняя» и «Звезда», то они различны по смыслу (если, конечно, знаки «Вечерняя» и «Утренняя» различны по смыслу). Вопрос же об отношении их значений остается открытым. Но если эти выражения заведомо берутся как различные названия одного и того же предмета, то мы имеем дело уже с другими знаками: теперь это — структурно простые знаки, тождественные по значению (и, значит, по смыслу).

## § 10. Построение знаков

*D1.* Если значение некоторого знака устанавливается (знак создается) без использования других знаков, будем такой знак называть простым по построению или исходным; если же значение знака устанавливается путем использования других знаков (хотя бы одного), будем называть его сложным по построению (или производным). Очевидно, что простой по построению знак является структурно простым, а структурно сложный — сложным по построению. Но последний может быть структурно простым, так что полного совпадения планов структуры и построения нет. Приведенные в пятом параграфе слова «килограммометр» и «динамометр» являются простыми по структуре, но сложными по построению: их значение разъясняется с помощью других знаков («прибор», «измерение», «величина» и т. п.). Сложные по построению знаки образуются посредством соглашений об отношениях знаков и вновь вводимых знаков по значению. Подробнее об этом скажем в следующей главе.

*D2.* Если значение сложного по построению знака может быть установлено без использования некоторых из знаков, которые использовались при установлении его значения, знак называется аналитическим, а если это невозможно — синтетическим.

## § 11. Существование предметов

При характеристике знаков важное значение имеет вопрос о том, существуют или нет находящиеся в соответствии с ними предметы.

Определение существования и несуществования предметов, пригодное для всех наук и всех случаев познания, невозможно. Фактически в разных науках и даже в разных разделах одной науки встречаются разные понимания существования и несуществования. Чаще вместо точных определений имеют место неявные и далеко не ясные соглашения на этот счет. Обычно существование и несуществование понимается как возможность или невозможность обнаружить предметы с помощью органов чувств и приборов, по их следам и последствиям и т. п., а также как возможность или невозможность создать предметы такого рода. В некоторых случаях существование или несуществование одних предметов явно или неявно постулируется, а вопрос о существовании или несуществовании других решается путем вывода из этих предпосылок.

Но можно указать нечто общее для всех наук и их разделов:

1) в каждой области науки найдется по крайней мере один способ выбора по крайней мере некоторых из изучаемых здесь предметов, который отличен от выбора этих предметов путем простого употребления обозначающих их знаков и которому приписывается то свойство, что если выбор предмета этим способом возможен (невозможен), то он считается существующим (несуществующим); назовем такой выбор экзистенциальным (*D1*); относительно таких экзистенциальных выборов и определяются выражения «существует» и «не существует» и строятся высказывания с ними;

2) для каждой из этих областей науки может быть указан перечень правил, позволяющих судить о существовании или несуществовании других (по крайней мере некоторых) предметов на основе сведений, указанных в первом пункте; здесь нельзя говорить о всех прочих предметах, исследуемых в данной науке, поскольку известны случаи, когда вопрос о существовании и несуществовании предметов неразрешим (на базе данных предпосылок);

3) экзистенциальный выбор предметов предполагает какую-то определенную, какую-нибудь или любую область пространства и времени; аналогично — для условий (в частности, это касается принятой системы определений терминов и допущений); и в каждом случае это должно быть как-то известно.

Например, возьмем выражение «Тройка целых чисел $x$, $y$ и $z$ таких, что $x^2 + y^2 = z^2$» и «Тройка целых чисел $x$, $y$ и $z$ таких, что $x^3 + y^3 = z^3$». Употребление этих выражений есть выбор соответствующих трех чисел. Но имеется другой способ выбора — записать числа знаками натуральных чисел или указать способ, посредством которого это можно сделать в конечное число шагов. Относительно этого второго способа выбора тройка чисел, обозначаемая первым выражением, существует, а обозначаемая вторым — нет. О существовании Петра I, далее, речь может идти не в том смысле, что он живет в данное время, а в историческом смысле. И показателем этого существования (экзистенциальный выбор) являются письменные свидетельства.

*D2*. Если З есть знак для П и при этом П не существует (существует), то знак З есть пустой (непустой) знак. Пустой знак имеет смысл и значение.

# ТЕРМИНЫ

## § 1. Термины

Термины суть знаки, из которых состоят высказывания. Они (эти знаки) обладают определенными физическими свойствами, удобными для выполнения этой роли: легкость конструирования и восприятия, общедоступность, возможность неограниченного числа повторений и т. д. Мы все эти их свойства предполагаем данными, т. е. принимаем следующее допущение: в каждой области науки известно, какими свойствами должны обладать знаки, чтобы стать ее терминами. Другими словами, мы допускаем: относительно какого-то множества предметов известно, что они суть термины. И задача теперь будет состоять в том, чтобы рассмотреть правила образования из них новых терминов и высказываний из терминов.

Термины будем обозначать символами

$$t,\ t^1,\ t^2, \ldots .$$

К терминам относится все, сказанное о знаках вообще. Ниже мы изложим еще ряд определений и утверждений, относящихся к терминам. Из них, однако, можно получить утверждения и определения для знаков вообще, заменив слово «термин» словом «знак». Дело в том, что мы рассматриваем термины исключительно как знаки. А тот факт, что это суть знаки определенного физического вида, никакой роли для последующего изложения не имеет. Поэтому мы и не вводим никакого строгого определения того, что такое термин, ограничившись допущением: термины суть знаки, являющиеся элементами языка науки.

*D1*. Термин $t^1$ называется общим (родовым) относительно $t^2$, а $t^2$ — частным (видовым) относительно $t^1$, если и только если

$$(t^1 \rightarrow t^2) \cdot \sim (t^2 \rightarrow t^1).$$

*D2*. Термин $t$ называется индивидуальным, если и только если невозможен такой $t^i$, что

$$(t \rightarrow t^i) \cdot \sim (t^i \rightarrow t)$$

(т. е. если и только если он не может быть родовым).

*D3*. Термин $t$ называется крайне (предельно) общим, если и только если невозможен такой $t^i$, что

$$(t^i \rightarrow t) \cdot \sim (t \rightarrow t^i)$$

(т. е. если и только если он не может быть видовым).

*D4*. Два термина $t^1$ и $t^2$ совместимы по значению, если и только если возможен такой $t^3$, что

$$(t^1 \rightarrow t^3) \cdot (t^2 \rightarrow t^3).$$

*D5*. Деление $t$ есть множество всех возможных несовместимых по значению терминов $t^1, \ldots, t^n$ из области значения $t$, где $n \geqslant 2$; термины $t^1, \ldots, t^n$ суть элементы деления $t$.

*D6*. Объем $t$ есть множество всех возможных индивидуальных терминов из области значения $t$; $t^i$ есть элемент объема $t$, если и только если он есть индивидуальный термин из области значения $t$.

Из *A*1II7, *A*2II7 и принятых определений получаются следующие следствия.

*T1*. Если $t^1 \rightarrow t^2$, то $t^1$ и $t^2$ совместимы по значению.

*T2*. Если $t^i$ есть элемент деления $t$, то $\sim (t^i \rightarrow t)$.

*T3*. Индивидуальный термин не имеет деления.

*T4*. Если $t^i$ есть элемент области значения индивидуального термина $t$, то $t \rightleftarrows t^i$ (т. е. объем индивидуального термина «равен единице»).

*T5*. Если $t^1 \rightarrow t^2$ и при этом $t^3$ есть элемент объема $t^2$, то $t^3$ есть элемент объема $t^1$.

*T6*. Если каждый элемент объема $t^2$ есть элемент объема $t^1$, то $t^1 \rightarrow t^2$.

Предельно общими являются термины «Предмет», «Один (какой-то) предмет», «Другой предмет» и т. д., где слова «Один», «Другой» и т. п. обозначают лишь то, что предметы могут быть различными (но различия предметов никак не фиксируются). Будем их изображать символами

$$t^*,\ t^{*1},\ t^{*2}, \ldots .$$

По определению для любого $t$

*T7.* $t^* \rightharpoondown t$, $t^{*i} \rightharpoondown t$.

Возможны пустые индивидуальные термины (например, «Зевс»). Возможны термины, которым соответствует только по одному существующему в то или иное время предмету, но которые не являются индивидуальными (например, «Космонавт, имеющий имя Юрий»).

Термин «Предмет, который не обозначается термином $t$» будем для краткости записывать символом

$$\sim t.$$

*A1.* Для всякого предмета П

$$((t \Leftarrow \text{П}) \cdot (\text{П} \Leftarrow t)) : ((\sim t \Leftarrow \text{П}) \cdot (\text{П} \Leftarrow \sim t))$$

*A 2.* $\sim \sim t \equiv t$

*D7.* Если знаки суть термины, то коннекторы знаков суть коннекторы терминов.

Из определения сложного знака следует:

*T 8.* $\sim (t^i \rightleftharpoons \{\alpha;\ t^1, \ldots,\ t^n\})$,

где $t^i$ есть любой из $t^1, \ldots,\ t^n$, $\alpha$ означает, что термин построен посредством каких-то коннекторов терминов.

## § 2. Определения

*T1.* Утверждая, что $t$ есть термин, мы (в силу принятых определений) предполагаем:

1) если $t$ есть простой термин, то значение его известно;

2) если $t$ есть $\{\alpha;\ t^1, \ldots,\ t^n\}$, то значение всех терминов $t^1, \ldots,\ t^n$ известно.

Таким образом, если $t$ есть термин, то в него не входят термины, значение которых не известно (не предполагается данным).

*D1.* Образовать термин $t$ — значит заставить предмет, имеющий вид $t$, играть роль термина. Образование термина, таким образом, не есть образование тела $t$, что не представляет проблемы в наших допущениях, но есть придание этому телу определенной функции (роли). Поскольку это зависит от воли и желания исследователя, это всегда есть некоторое соглашение или решение (последнее может быть вынужденным какими-то обстоятельствами, что дела не меняет). Слово «решение» здесь более подходит. Слово «соглашение» уместно постольку, поскольку решение приходится согласовывать с другими исследователями.

*D2*. Образование термина посредством соглашения об отношении его значения и значений других терминов будем называть определением термина. Точнее говоря, определение термина есть соглашение одного из следующих четырех видов.

Определение типа I (простое определение): предмет $t^1$ (имеющий вид $t^1$) будет термином (будем считать термином; исследователь предлагает считать термином) таким, что

$$t^1 \rightleftharpoons t^2,$$

где $t^2$ есть термин. Сокращенно:

$$t^1 = Df \cdot t^2.$$

До построения определения $t^1$ не есть термин.

Определение I применяется тогда, когда $t^2$ есть сложный термин. Здесь $t^1$ вводится как сокращение. Иначе это определение лишено практического смысла. Термин $t^1$ здесь называется определяемым, а $t^2$ — определяющим термином (*D*3). Если $t^2$ есть сложный термин, то, очевидно, $t^1$ и $t^2$ не тождественны по смыслу. Определяемый термин в случае I всегда есть простой термин.

Определение типа II (определение через перечисление; индуктивное, рекурсивное определение): предмет $t$ будет термином таким, что $X$, где в $X$ перечисляются все термины $t^i$ такие, что

$$t \rightharpoonup t^i,$$

и указывается, что

$$\sim (t \rightharpoonup t^k),$$

где $t^k$ есть любой термин, отличный от каждого из $t^i$ по значению.

Определения II можно разбить на две группы. Определение II$^1$: предмет $t$ будет термином таким, что

$$(t \rightharpoonup t^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightharpoonup t^n) \cdot \sim (t \rightharpoonup t^k),$$

где $n \geqslant 2$. Определение II$^2$ является более сложным и может охватывать бесконечное число $t^i$. Оно имеет такой вид. Предмет $t$ будет термином таким, что:

1) $(t \rightarrow t^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightarrow t^m)$,

2) $((t \rightarrow t_1^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightarrow t_1^k)) \rightarrow ((t \rightarrow t_2^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightarrow t_2^l))$,

где $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, а $t_2^1, \ldots, t_2^l$ суть термины, образованные из $t_1^1, \ldots, t_1^k$,

3) $\sim (t \rightarrow t^n)$,

где $t^n$ есть любой другой термин, отличный от $t^1, \ldots, t^m$, $t_1^1, \ldots, t_1^k$, $t_2^1, \ldots, t_2^l$ по значению; другими словами, $t$ не включается по значению ни в какой другой термин, кроме указанных в пунктах 1 и 2.

В определении II определяемый термин $t$ точно так же является простым. Разделение на определяемую и определяющую части здесь не является буквальным, как в случае I.

Определение типа III: предметы $t^0$ и $\{\alpha; t^0, t^1, \ldots, t^n\}$ будут терминами такими, что

$$\{\alpha; t^0, t^1, \ldots, t^n\} \rightleftharpoons \{\beta; t^1, \ldots, t^n, t_1, \ldots, t_m\},$$

где $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $\alpha$ и $\beta$ могут быть различными и тождественными. Здесь вновь вводимыми являются оба указанные термина. Определение IV есть определение типа II для термина $\{\alpha; t^0, t^1, \ldots, t^n\}$, в который входит вновь вводимый термин $t^0$. Более детальное описание свойств определений предполагает описание свойств коннекторов, а последнее предполагает рассмотрение конкретных форм высказываний.

Прочие операции по образованию терминов из данных терминов являются производными от операций с высказыванием.

## § 3. Традиционные правила определений

В традиционной логике к определениям предъявлялись такие требования: 1) соразмерность; 2) отсутствие тавтологичности; 3) отсутствие круга. Поскольку в качестве определения рассматривалось лишь определение типа I, то и эти требования разъяснялись лишь для этого простейшего случая. Мы их распространим на прочие типы определений и покажем, что они суть следствия из принятых ранее определений и утверждений.

Возьмем определение I. Если $t^1 = Df \cdot t^2$, то $t^1 \rightleftharpoons t^2$, и согласно $T5$III1 объемы их совпадут (а это и означает, что требование соразмерности выполнено). Если $t^2$ есть термин, то $t^1$ не входит в $t^2$ по самому определению определения $D2$III2. А это и означает, что в $t^1 = Df \cdot t^2$ нет тавтологии. Пусть $t^2$ есть $\{\alpha;\ t_1, \ldots, t_n\}$ и $t_1 = Df \cdot \{\beta;\ t^1, t^i, \ldots, t^k\}$; согласно $T1$II8 имеем: $t^1 \rightleftharpoons \{\alpha;\ \{\beta;\ t^1,\ t^i, \ldots$ $\ldots, t^k\}, \ldots, t_n\}$; таким образом для установления смысла $t^2$ необходимо знать смысл $t^1$, а последний не есть термин до данного определения. Так что если термин, входящий в $t^2$, определяется в свою очередь через $t^1$, то определение $t^1$ через $t^2$ невозможно. А это и есть требование отсутствия круга в определении.

Требование соразмерности для II$^1$ очевидно, поскольку принимается $\sim (t \rightharpoonup t^k)$: все элементы объема $t^1, \ldots, t^n$ согласно $T5$III1 суть элементы объема $t$, а других терминов, в которые включается по значению $t$, нет. Со вторым требованием дело обстоит так: если $n = 1$, то $(t \rightharpoonup t^1) \cdot$ $\cdot \sim (t \rightharpoonup t^k)$ равносильно $t = Df \cdot t^1$, а $t^1$ — термин по условию. Если некоторые из $t^i$ суть $t$, то они просто отбрасываются как излишние. Если все $t^i$ суть $t$, то имеем $(t \rightharpoonup$ $\rightharpoonup t) \cdot \sim (t \rightharpoonup t^k)$. Поскольку $t$ не есть термин до принятия $t \rightharpoonup t$, то последнее не есть определение. С кругом дело обстоит аналогично I: если в $t^i$ входит термин, определяемый через $t$, то $t^i$ не есть термин.

Требование соразмерности для II$^2$ гарантируется пунктом 3. Второе и третье требования выполняются для II$^2$ в том смысле, что в $t^1, \ldots, t^m,\ t_1^1, \ldots, t_1^k,\ t_2^1, \ldots, t_2^l$ не входит термин, определяемый через $t$, и ни один из них не есть $t$.

## § 4. Определения и утверждения

В языке науки определения формулируются в литературно разнообразных видах: с помощью выражений «есть», «будем называть», «если..., то будем считать (называть)...» и т. п. Но все эти вариации не касаются сути определений: они при всех обстоятельствах суть соглашения считать некоторый предмет термином с таким-то значением.

Определения часто формулируют как высказывания о предметах, а не как соглашения относительно терминов. Это удобно с точки зрения вывода следствий. Однако это ведет к смешению различных логических форм. В высказываниях о предметах все входящие в них термины имеют значение независимо от данных высказываний и до построения их, тогда как в определениях вновь вводимые термины приобретают значение лишь благодаря определениям. Правильнее будет говорить так: из определений получаются высказывания по некоторым правилам (мы их укажем ниже). Придавая определениям вид высказываний о предметах, фактически сразу берут высказывания, получающиеся из определений, которые остаются в таких случаях неявными (имплицитными).

Определение не следует смешивать также с установлением того, принадлежит данный предмет к некоторому множеству или нет (может быть назван некоторым термином или нет). Например, возьмем выражение «Если в жидкость поместить лакмусовую бумажку и она (бумажка) при этом окрасится в красный цвет, то данная жидкость есть кислота». Это выражение можно рассматривать как определение термина «кислота» (мы не говорим здесь о том, удачно это или нет), и тогда более явно эту его функцию выразит фраза «жидкость, окрашивающая лакмусовую бумажку в красный цвет, называется (будем называть) кислотой». Но его можно рассматривать как один из способов выяснения того, является данная жидкость кислотой или нет; при этом термин «кислота» определен до этой фразы и независимо от нее.

## § 5. Определение и выбор

Всякое определение терминов связано с каким-либо способом выбора предметов. Но не всегда выбор предметов, завершающийся введением термина, есть определение. Встречается, например, такой способ введения терминов: перечисляются предметы, подобранные так, чтобы у них было единственное сходное свойство; единственность достигается подбором примеров применительно к данным условиям (в частности, к характеру образования читателей), так что число примеров и их вид могут варьироваться; то общее, что у этих приводимых в примерах предметов имеется, обозначается вводимым термином; при этом задача состоит в том, чтобы научить читателя или слушателя осуществить выбор нужного свойства предметов. Но это не есть определение, хотя здесь и вводится новый термин.

Аналогично обстоит дело в тех случаях, когда задаются операции, с помощью которых можно обнаружить или вновь создать некоторый предмет, и вводят термин, обозначающий такой предмет. В этих случаях дело обстоит в принципе аналогично (но лишь несколько сложнее) введению терминов таким способом: «предмет, который вы видите (слышите и т. п.), называется *t*». Хотя здесь и фигурируют термины, значение которых известно, здесь не устанавливается отношение значений терминов, как в случаях I—IV.

Так что в тех случаях, когда под «операционными определениями» имеют в виду построение терминов путем описания операций по выбору предметов, то имеют в виду способы введения терминов, отличные от определений терминов в нашем смысле. Мы такие способы предполагаем данными, но их не рассматриваем. Самое большее, что о них можно сказать в общем виде (не затрагивая конкретных форм операций), это — сделанное выше замечание.

Учитывая сказанное, надо уточнить выражение «использование одних терминов при образовании других». В только что упомянутых нами случаях используется язык, т. е. используются какие-то термины. Но они используются как средство выбора предметов, средство ориентации исследователей в мире. Термины здесь не даны как предметы нашего внимания, не используются как материал для образования новых терминов. Вводимые в таких случаях термины являются простыми по построению.

## § 6. Понятие

*D1.* Термин, значение которого устанавливается посредством определения (который вводится, создается определением), будем называть понятием.

Очевидно, не всякий термин есть понятие, если даже он является сложным в плане построения. Так, $\{\alpha; t^1,\ldots \ldots,t^n\}$ не есть понятие. Возможны термины, построенные из понятий, но сами не являющиеся таковыми. Например, термин «10 кгм/сек» построен из понятий «число 10», «кг», «м» и «сек», но он не есть понятие, если получен как результат замены высказываний с терминами «$a$ кг», «$b$ м» и «$c$ сек» на высказывание с этим термином.

*D2.* Содержание понятия $t^1$ в случае определения $t^1 = Df \cdot t^2$ есть смысл $t^2$; содержание понятия $t$ в случае определений II—IV есть смысл всех терминов $t$, фигурирующих в определении.

*D3.* Понятия, фигурирующие в каждой данной области науки, можно разделить на специфические и неспецифические. Специфические в свою очередь разделяются на первичные (не определяемые через другие специфические понятия) и производные (определяемые через другие специфические и, в конце концов, через первичные). Первичные понятия определяются с помощью терминов обычной речи, терминов других наук и даже понятий других наук. Так что абсолютно неопределяемых понятий нет. В аксиоматических теориях первичные понятия «определяются аксиомами» (поясним ниже). Лишь в формальных построениях употребляются неопределяемые (первичные) «знаки». Но без интерпретаций они не имеют значения, т. е. не являются знаками (и, следовательно, терминами).

Встречаются случаи, когда некоторые термины принимаются лишь постольку, поскольку с их помощью можно определить необходимые для каких-то целей термины. Но и в этих случаях возможны три исхода: 1) эти термины простые по построению; с их помощью вводятся первичные понятия; 2) значение этих терминов разъясняется с помощью других терминов, так что в этом «разъяснении» в неявной форме содержится определение; эти термины при этом суть первичные понятия; 3) в «разъяснениях», о котором говорилось во втором пункте, не содержится определения; с помощью этих терминов вводятся первичные понятия (а не они сами суть такие понятия). Практически же обычно смешиваются элементы всех трех вариантов, так что внесение логической четкости оказывается делом затруднительным и часто излишним.

*D4.* Пусть имеется и употребляется термин $t^1$, а понятие $t^2$ вводится (определяется) с таким расчетом, чтобы имело место $t^1 \rightleftharpoons t^2$. Такое введение $t^2$ называется экспликацией $t^1$.

Практически редко может случиться так, что эксплицируемый и эксплицирующий термины окажутся тождественными по значению. Обычно эксплицируемые термины бывают расплывчатыми, многозначными и т. п. Так что в результате экспликации удается ввести понятие, совпадающее по значению с эксплицируемым термином лишь в некоторых определенных контекстах. С этой точки зрения экспликация играет роль не только уточнения смысла терминов (что достигается благодаря определению), но также роль выбора (выделения) области исследования: вводя термин $t^2$, исследователь делает это для того, чтобы употреблять затем его вместо $t^1$, и принимает соответствующее решение (т. е. осуществляет определенный выбор). Тем самым устраняется многозначность терминов.

## § 7. Значение и контекст

*D1.* Контекст термина — некоторая локализованная в пространстве или времени совокупность высказываний и терминов, в которую он входит (в которой он встречается, употребляется и т. п.).

Символами

$$C^i \text{ и } tC^i$$

будем изображать соответственно контексты и термин $t$, взятый в этих контекстах.

*D2.* Если для любых двух различных контекстов $C^1$ и $C^2$ имеет место

$$tC^1 \rightleftharpoons tC^2,$$

то $t$ есть неконтекстуальный или однозначный термин (его значение не зависит от контекста).

*D3.* Если найдутся по крайней мере два контекста $C^1$ и $C^2$ такие, что

$$\sim (tC^1 \rightleftharpoons tC^2),$$

то $t$ есть контекстуальный или многозначный термин (его значение зависит от контекста).

Мы исключаем многозначность терминов, приняв соглашение: *A1.* Если $\sim (tC^1 \rightleftharpoons tC^2)$, то $tC^1$ и $tC^2$ суть различные термины.

## § 8. Проблема сведения

Одна из проблем логического анализа научных знаний — проблема сведения научных терминов любого вида и любой степени сложности к простым по построению терминам. Решение этой проблемы можно мыслить двояко: 1) указать способы, посредством которых любой научный термин можно было бы заменить некоторой упорядоченной совокупностью простых по построению терминов; 2) указать способы построения научных терминов, так чтобы были выявлены все связи терминов по значению вплоть до простых по построению терминов. В первом смысле проблема неразрешима, во втором она фактически разрешается в каждой области науки. Причем, это разрешение не есть нечто раз и навсегда установленное и единственно возможное. Нет никаких абсолютных критериев простоты и сложности терминов, первичности и производности понятий. Здесь играют роль исторически сложившиеся условия, случайности и постоянные перемены в науках. *К одним и тем же целям и результатам могут* вести различные совокупности терминов, различные способы их введения, различные системы их взаимоотношений. Поэтому положения логики об отношениях терминов и о способах их построения суть лишь некоторые схемы, с помощью которых можно рассматривать терминологию той или иной области науки в какой-то период ее развития (и вносить, возможно, усовершенствования в терминологический аппарат науки), но отнюдь не рекомендации раз и навсегда установить абсолютно жесткие отношения «простой — сложный», «первичное — производное» и т. п.

Конечно, каждый термин науки в конце концов имеет основу в некоторой совокупности простых по построению терминов. Но «расстояние» от данного термина до этой основы часто бывает настолько далеким (опосредованным), а сам путь — настолько извилистым и разветвленным, что сведение его к этой основе теряет всякий практический смысл. И утверждение о возможности найти для каждого термина такой «основной» эквивалент остается лишь абстрактной возможностью. Попытки осуществить это на деле в достаточно широких масштабах обречены на неудачу. Но это отнюдь не отвергает целесообразности попыток осуществить это для ограниченных областей науки, частично, упрощенно, приближенно и т. д. Практическое и теоретическое значение таких попыток будет, надо думать, все возрастать.

## § 9. Термины терминов

Если некоторый предмет есть термин, то это означает, что он выполняет определенные функции в деятельности исследователя, играет определенную роль, употребляется определенным образом. Но термин может сам стать предметом внимания в качестве термина, как это делается, например, в логике. Для него, очевидно, в таком случае должен быть введен какой-то термин. Своеобразие здесь состоит в том, что термином для данного термина является какой-то экземпляр самого этого термина с некоторыми дополнениями или модификациями (кавычки, курсив и т. п.). Условимся термин термина $t$ обозначать символом

$$[t].$$

Для $t$ и $[t]$ имеют силу утверждения:

*A 1.* $\sim(t \rightarrow [t]), \sim([t] \rightarrow t)$.

*A2.* Смысл $t$ не зависит от $[t]$ (т. е. известен до построения $[t]$). Смысл же $[t]$ известен, если и только если известен смысл $t$.

Если смысл $t$ не известен, то он берется не как термин, а как воспринимаемый предмет, имеющий вид $t$, и тогда $[t]$ не есть термин для термина, а есть просто термин некоторого предмета.

# ВЫСКАЗЫВАНИЯ

## § 1. Проблема определения высказывания

Встречаются определения высказывания через значения истинности. В частности, это делают так: высказывание — то, что может быть истинным или ложным. Эти определения несостоятельны. Надо знать, что такое высказывание, прежде чем говорить о таких его свойствах, как истинность, ложность и т. п. Если в отношении истинности и ложности можно допустить иллюзию первичной ясности, то в отношении других значений истинности (а они возможны, и их тоже надо учитывать в определении высказывания) нечто подобное исключается. Применительно к некоторым формам высказываний даже термины «истинно» и «ложно» теряют кажущуюся первичную ясность.

Встречаются также определения высказывания с помощью выражений «мысль», «содержание», «утверждение», «отрицание» и т. п. В частности, высказывание иногда определяют как мысль, что-либо утверждающую или отрицающую о чем-либо. Эти определения точно так же несостоятельны. Утверждение и отрицание суть формы высказываний. Термины «мысль», «содержание» и т. п. не определены достаточно точно, многосмысленны. Употребление их в данном случае есть пережиток психологизма в логике, согласно которому языковые формы не сами по себе имеют интерес для логики, а лишь как оболочки особых идеальных (духовных) предметов, обитающих где-то в голове.

Высказывания суть эмпирически данные (воспринимаемые) предметы, построенные из терминов по определенным правилам и с помощью каких-то дополнительных воспринимаемых же предметов. Это — особого рода «вещные» структуры, структуры из воспринимаемых «вещей». И определение термина «высказывание» должно быть найдено путем описания этих структур. Но при этом надо учитывать следующее. Во-первых, число различных структур высказываний не ограничено какими-то обстоятельствами, вытекающими из самой природы высказываний. И только потому, что введение в обиход новых структур зависит не от абстрактных возможностей их изобретать, а от внешних им потребностей людей, условий познания, целесообразности и т. п., люди оперируют лишь конечным (и сравнительно небольшим) множеством структур высказываний. Определение же по самой своей природе вносит какие-то ограничения. Во-вторых, высказывания можно рассматривать с различных точек зрения. И при этом описание структуры их с одной точки зрения требует отвлечения от всего того, что может быть обнаружено с другой. Можно сказать, что описание структуры высказываний есть процесс во многих «измерениях». И искомое определение может сложиться лишь из совокупности определений, даваемых в различных разделах логики.

Мы принимаем следующий путь определения понятия «высказывание»:

1) перечисляются структуры из терминов и коннекторов, которые считаются высказываниями;

2) перечисляются структуры из высказываний и коннекторов, которые считаются высказываниями;

3) если $Y$ есть высказывание, и по соглашению принимается, что $X$ тождественно $Y$ по смыслу, то $X$ есть высказывание.

В последующих главах мы перечислим структуры, упомянутые в пунктах 1 и 2. Что же касается пункта 3, то здесь возможности введения новых структур высказываний не ограничены. В этой главе мы рассмотрим некоторые общие вопросы, для изложения которых достаточно привычного понимания высказываний, которое в случае необходимости может быть пояснено примерами.

## § 2. Основные принципы построения высказываний

Высказывания будем изображать символами

$$X, Y, Z, X^1, X^2, \ldots, Y^1, Y^2, \ldots .$$

Каждый из этих символов есть любое высказывание, а различие двух совместно употребляемых символов обозначает лишь то, что высказывания могут быть различными.

Всякое высказывание состоит из терминов и каких-то дополнительных предметов (скажем, логических знаков). Пусть $t^1, \ldots, t^n$ ($n \geqslant 2$) суть все термины, входящие в состав высказывания $X$. Мы принимаем следующие допущения (соответствующие фактическому положению дел):

*A1*. Существование предметов $П^1, \ldots, П^n$, обозначаемых соответственно терминами $t^1, \ldots, t^n$, не зависит от $X$ (от того, построено $X$ или нет).

*A2*. Выбор предметов $П^1, \ldots, П^n$ не зависит от $X$ (их можно выбрать, не строя $X$).

*A3*. Смысл $t^1, \ldots, t^n$ не зависит от построения $X$ (он известен до построения $X$).

*A4*. Смысл каждого из $t^1, \ldots, t^n$ не зависит от смысла других (т. е. смысл любого из них известен независимо от других).

Принятие *A1* — *A4* избавляет от целого ряда неприятных последствий, которые неизбежны без них. Возьмем, например, фразу «То высказывание, которое сейчас пишу (читаю, произношу и т. п.), не является истинным». Она не есть высказывание, так как выражение «То высказывание, которое сейчас пишу» лишено смысла, пока высказывание не написано, т. е. оно зависит от фразы в целом, и выбрать соответствующий предмет, не написав фразу, мы не можем.

В структуре фраз, разумеется, видимым образом никак не зафиксировано то, выполнены требования *A1* — *A4* или нет. Эти требования суть неформальные условия построения высказываний. И в каждом частном случае должно быть ясно, имеем мы дело с высказыванием или с высказываниеподобным предметом. Никаких формальных (структурных) критериев их различения (как и в случае со знаками и знакоподобными предметами) нет.

*A5*. $(t^1 \rightleftarrows t^2) \to (X \to X(t^1/t^2))$,

где $X(t^1/t^2)$ есть высказывание, образованное из $X$ путем замены $t^1$ на $t^2$.

## § 3. Коннекторы высказываний

*D1*. Предметы, с помощью которых из терминов образуются высказывания и из высказываний высказывания, будем называть коннекторами высказываний.

*D2*. Коннекторы терминов и высказываний суть логические коннекторы.

Коннекторы терминов и высказываний (логические коннекторы) суть различные коннекторы. Подробно мы их различия рассмотрим ниже. В обычном и научном языке они не всегда выражаются стандартно однообразно и явно. Мы, однако, должны допустить, что они суть особые, локализованные в пространстве и времени, воспринимаемые предметы. Исключим из рассмотрения также факт многозначности языковых средств и разнообразие выражений одних и тех же функций (выполняемых ролей) знаков. Эти абстракции означают следующее: в реальных языках имеется нечто такое, что соответствует тем символам, с помощью которых в теории знаний обозначаются рассматриваемые коннекторы; эти символы однозначны, а их видимое различие есть показатель различия функций соответствующих языковых средств. Другими словами, здесь абстрагируются функции языковых средств, какой бы вид они не имели. С другой стороны, эти абстракции означают допущение необходимых навыков распознавания этих функций в любых контекстах данного языка.

Рассматриваемые коннекторы не являются знаками сами по себе. Лишь в соединении с терминами и высказываниями они становятся частями знаков. Задача их исследования состоит не в описании того, каков их воспринимаемый вид (это — данная предпосылка, и только), а в установлении их роли в образовании знаков. Последнее же невозможно без описания свойств тех структур, элементами которых они являются. А описать свойства этих структур — значит описать условия осмысленности терминов и истинности высказываний, правила построения одних терминов и высказываний из других и т. п., т. е. исследовать знания в планах построения и значения.

Изучение одних коннекторов можно свести к изучению других, если возможно определить структуры, содержащие первые из них, через структуры, содержащие вторые. От сводимости логических коннекторов надо отличать использование одних из них при описании свойств других. Если описание всех свойств одного коннектора невозможно без использования другого, то второй будем считать необходимым относительно первого. Исследование сводимости и такой зависимости коннекторов приводит к некоторым комплексам взаимно несводимых и взаимно необходимых коннекторов, исследование которых образует фундамент логической теории научных знаний.

Через логические коннекторы могут быть определены другие логические средства, которые (вместе с коннекторами) называют логическими знаками. Хотя это словоупотребление не вполне корректно, мы его допускаем, полагая, что слово «логические» вносит здесь некоторое уточнение: логические знаки суть знаки, значение которых исследуется и устанавливается в логике.

## § 4. Сложные термины и высказывания

Иногда высказывания рассматривают как сложные утверждаемые термины. Конечно, рассмотрение терминов и высказываний с некоторой общей точки зрения вполне правомерно: и те и другие суть структуры из знаков. Но при этом надо иметь в виду следующее. Возьмем, например, высказывание «Частица заряжена положительно» и термин «Частица, которая заряжена положительно» (или термин «Тот факт, что частица заряжена положительно»). В первом утверждается, что предмет обладает некоторым свойством. Ничего подобного нет во втором. Но будем «утверждать» термин. Что это означает? Одно из двух: либо построение высказывания «Дана (имеется, существует, наблюдается и т. п.) частица, которая заряжена положительно», либо переход к данному высказыванию «Частица заряжена положительно». Но в первом случае получается высказывание, отличное от данного, а во втором случае мы имеем не пример сведения высказывания к термину, а лишь пример к утверждению о том, что из высказывания может быть получен термин (и наоборот) посредством определенной операции. В других случаях несводимость высказываний к терминам еще более очевидна. Так, превращение высказывания «Все четные числа делятся на два» в термин «Четное число, которое делится на два» приводит либо к потере квантора «все», либо к образованию термина, не соответствующего исходному высказыванию; в обоих случаях ограничение, выражаемое словом «которое» («которые»), теряет смысл. Высказывания отличаются от сложных терминов наличием особых коннекторов, отличных от таковых для терминов. Но этого мало. Возьмем, например, термин «$a$, который больше $b$ и имеет свойство $c$» и высказывание «$a$, который имеет свойство $c$, больше $b$». Наличие выражений «который» и «имеет свойство» в обоих не устраняет их различий. Очевидно, важно не только наличие каких-то логических коннекторов, но и определенная упорядоченность их и терминов.

## § 5. Простые и сложные высказывания

*D1.* Высказывание, которое не содержит (содержит) в качестве своих частей по крайней мере два других различных высказывания, будем называть простым (сложным) по структуре. Структурно сложное высказывание, иначе говоря, образуется путем соединения двух или более высказываний особыми коннекторами.

*D2.* Будем считать, что высказывание $X$ содержательно используется при получении высказывания $Y$, если при этом в $Y$ входит по крайней мере один термин или по крайней мере одно высказывание, входящее в $X$.

*D3.* Высказывание, при получении которого никакие другие высказывания не используются содержательно, будем называть простыми по построению; высказывание же, при получении которого содержательно используется по крайней мере одно отличное от него высказывание, будем называть сложным по построению.

Простые по построению высказывания суть результат наблюдений (эмпирические высказывания) или предположений (допущения, гипотезы). Простое по структуре высказывание может быть сложным по построению.

## § 6. Познавательные действия

Процесс получения знания складывается из активных действий исследователя с некоторым данным материалом — с чувственно данными или воображаемыми (допускаемыми) предметами и имеющимися знаниями. Эти действия фиксируются в языке посредством выражений «возьмем», «примем», «допустим», «из ... получаем...», «заменим ... на ...» и т. п. Эти выражения суть знаки познавательных действий.

Действия с воображаемыми предметами можно свести либо к действиям с реальными предметами (типы действий совпадают), либо к действиям с предложениями вида «Пусть имеет место...», «Возьмем...», «Допустим, что ...» и т. п., а последние — к действиям с высказываниями «Если ..., то ...» (где после «Если» излагается допускаемое).

Действия с чувственно данными предметами предполагают чувственное отражение исходного материала и результатов действий. Они заключаются в выделении предметов, в различении и отождествлении их, в расчленении, соединении, переносе, модификации, во включении в желаемые связи и в извлечении из данных связей и т. п. Одни из этих действий не влияют на предметы, другие — влияют. Исходный материал и результат действий второго рода могут быть описаны в высказываниях, а активность исследователя может быть элиминирована с помощью условных высказываний вида «Если $X$, то $Y$», где $X$ есть описание результата действий, а $Y$ — то знание, которое получается при этом условии. Так что действия второго рода можно рассматривать как содержательные условия получения знаний. Действия же первого рода такими не являются. Они сами суть условия всяких познавательных действий с предметами вообще.

Знания сами суть чувственно воспринимаемые предметы, и к ним относится все сказанное. Но здесь в силу специфики знаний как особых предметов (термины, высказывания) появляются познавательные действия, не сводимые к содержанию каких-то высказываний, являющиеся чисто формальными условиями получения знаний. Это суть действия по получению одних терминов и высказываний из других.

И в отношении познавательных действий встает задача: отыскать элементарные познавательные действия, из совокупности которых складываются любые сложные действия по получению знаний. Элементарными познавательными действиями с предметами, как уже говорилось, являются выбор и сопоставление. Выбор предметов при построении (получении) высказываний будем называть эвристическим; аналогично — сопоставление (*D1*). Что касается действий со знаниями, то исследование их — главная цель логической теории научных знаний.

## § 7. Построение высказываний

Когда речь идет о построении высказываний, то имеется в виду не просто их физическое создание (это проблемы не представляет). При этом имеется в виду создание таких высказываний, которые удовлетворяют каким-то целям, которые принимаются, признаются и т. д. Произнести и написать (напечатать) можно любое количество высказываний. Но далеко не все из них представляют какую-то ценность для людей и могут быть признаны, приняты. Вопрос о критериях практической ценности тех или иных высказываний для данной области науки не является вопросом логики. Что же касается тех критериев, которые позволяют принимать или отвергать те или иные высказывания, то в некоторой мере они рассматриваются в логике.

Аналогично, когда речь идет о получении (построении) одних высказываний из других, то имеется в виду не физическое превращение первых во вторые, а действия, которые внешне можно описать следующим образом:

1) даны высказывания $X^1,\ldots,X^n$ $(n \geqslant 1)$; даны как видимые, слышимые и т. д. предметы; они анализируются — выясняется, какие термины и логические знаки входят в их состав и как расположены друг относительно друга;

2) в зависимости от результатов этого анализа и некоторых других внешних обстоятельств (условия, цель и т. п.) создается (воспроизводится и т. п.) высказывание $Y$; причем, имеются правила, благодаря которым (в данных условиях и при данной целевой установке) создается именно $Y$;

3) правила эти изобретаются (вырабатываются) с таким расчетом, чтобы выполнялось следующее требование: если принимаются (признаются) $X^1,\ldots,X^n$, то и $Y$, полученное в соответствии с этими правилами, должно быть принято.

После того, как эти правила изобретены и усвоены, положение оборачивается: они заставляют принимать $Y$, раз приняты $X^1,\ldots, X^n$. Теперь они воспринимаются как нечто аналогичное силам и законам природы, а не как продукт творчества людей.

Из правил получения высказываний в логике изучаются прежде всего правила логического следования.

Они вырабатываются с таким расчетом, чтобы выполнялось требование: если из $X$ логически следует $Y$, и при этом $X$ принимается за истинное, то и $Y$ должно быть принято за истинное. Эти правила суть определения свойств логических знаков, входящих в $X$ и $Y$. Так что если из $X$ получается $Y$ по этим правилам, то это имеет место в силу свойств логических знаков, входящих в них. Последние изобретены людьми такими, что из $X$ логически следует или не следует $Y$ в зависимости от строения $X$ и $Y$. При этом $X$ достаточно для получения и признания $Y$. Высказывание $X$ называют посылкой, а $Y$ — заключением (или следствием).

Получение $Y$ из $X$ по правилам логического следования будем изображать символом

$$X \vdash Y$$

(читается «Из $X$ логически следует $Y$»). Если из $X$ логически не следует $Y$, будем писать

$$\sim (X \vdash Y).$$

В качестве сокращения для

$$(X \vdash Y) \cdot (Y \vdash X)$$

будем употреблять

$$X \dashv\vdash Y.$$

Перечень правил логического следования будет установлен в дальнейшем в связи с рассмотрением конкретных форм высказываний.

От правил логического следования отличаются правила, которые разрешают принимать $Y$, если приняты $X^1, \ldots, X^n$, но не являются определениями логических знаков, входящих в $X^1, \ldots, X^n$, $Y$. Их можно разбить на две группы. К одной из них относятся соглашения заменять одни высказывания другими и следствия таких соглашений, благодаря которым из терминов, фигурирующих в $X^1, \ldots, X^n$, получаются новые термины, фигурирующие в $Y$. Назовем их правилами замены терминов. Осуществляемые в соответствии с ними замены суть удобные средства хранения знаний и оперирования ими. Благодаря им сложные совокупности высказываний заменяются сокращенными, доступными обозрению совокупностями знаков. Это — не символизация, которая тоже сокращает, а именно замена одних совокупностей высказываний другими.

Например, такая замена при получении высказываний о скорости тела состоит не в замене слов «километр» и «секунда» сокращениями «км» и «сек», а в замене высказываний о расстоянии, пройденном телом, и о времени, в течение которого это происходило, одним высказыванием. При таких заменах, далее, явно формулируются логические свойства данных совокупностей высказываний. Более того, часто лишь благодаря такой замене совокупность высказываний приобретает свойства, позволяющие воспользоваться правилами вывода (в частности, логическими и математическими правилами). Например, заменив совокупность высказываний $a = b^1, \ldots, a = b^n$ на $a = f(\alpha, t)$, где $\alpha$ есть некоторая константа, $t$ — время, а $f$ — определенный тип функции, мы можем использовать свойства $f$ в последующих рассуждениях. Вырожденный случай правил замены — простое одноактное соглашение употреблять вместо некоторой совокупности высказываний $X$ высказывание $Y$.

Правила замены терминов (как и правила логического следования) чисто формальны, т. е. переход согласно им совершается на основе рассмотрения воспринимаемого вида терминов и высказываний. Эти правила называют дедуктивными. Неформален сам процесс выработки (изобретения, подбора) этих правил, творческие операции, задача которых — изобрести такие правила, чтобы последние затем можно было использовать стандартно, формально (в известных пределах, конечно). Число таких правил не ограниченно. К ним относятся правила, относящиеся ко всем наукам и лишь к отдельным областям науки, используемые многократно и лишь один раз. Научная деятельность в значительной мере состоит в изобретении таких правил.

Ко второй группе относятся правила, которые иногда называют неформальными, индуктивными или внелогическими. Согласно этим правилам может быть принято $Y$, если истинны $X^1, \ldots, X^n$, но не дается гарантии, что $Y$ будет обязательно истинно. Известны случаи, когда $Y$ затем оказывается неистинным и отвергается. Источник этих правил — некоторые общие допущения относительно исследуемых предметов. В какой-то мере эти правила могут исследоваться и исследуются в логической теории научных знаний, хотя и имеется известная тенденция исключить их из сферы внимания логики.

## § 8. Смысл высказываний

Уже из простых примеров видно, что отсутствует полный параллелизм планов значения для терминов и для высказываний. Так, термин «простое число четыре» имеет значение и смысл, а высказывание «четыре — простое число» ложно. Употребление же терминов «истинно», «ложно» и т. п. при характеристике терминов основано на смешении понятий.

*D1*. Будем считать, что исследователю известен смысл простого высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него терминов и логических знаков, и известен смысл сложного высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него высказываний и логических знаков. Высказывание имеет смысл, если и только если смысл его известен исследователю.

Выражение «высказывание имеет смысл» и «высказывание не имеет смысла» приходится употреблять лишь постольку, поскольку можно сконструировать предметы, похожие на имеющие смысл высказывания, и нет никаких структурных признаков, по которым их можно различить. Выражение «высказывание не имеет смысла (бессмысленно)» иногда употребляется также для обозначения того, что невозможно установить, истинно или ложно высказывание. Но мы для этой цели будем употреблять другой термин.

*D2*. Термины и простые высказывания, входящие в данное высказывание, будем называть единицами смысла последнего.

Тождество $X$ и $Y$ по смыслу будем записывать символом

$$X \equiv Y.$$

Символом

$$X\,(t^1/t^2)$$

будем изображать высказывание, образованное из $X$ путем замены термина $t^1$ термином $t^2$. Символ

$$X\,(t^1, \ldots, t^n/t_1, \ldots, t_n)$$

будем рассматривать как сокращение для

$$((X(t^1/t_1))\ldots)(t^n/t_n).$$

*D3*. Два высказывания тождественны по смыслу только в силу соглашений или в силу следующих утверждений:

*A1*. $(t^1 \equiv t^2) \to (X \equiv X(t^1/t^2))$

*A2*. $(X \equiv Y) \to (Z \equiv Z(X/Y))$,

где $Z(X/Y)$ есть высказывание, образованое из $Z$ путем замены $X$ на $Y$.

*A3*. $(X \equiv Y) \cdot (X \equiv Z) \to (X \equiv Z)$.

Тождество по смыслу обладает также следующими свойствами:

*A4*. $(X \equiv Y) \to (X \leftrightarrow Y)$

*A5*. $(X \equiv Y^1 : \ldots : Y^n) \to ((Y^1 \to X) \cdot \ldots \cdot (Y^n \to X))$.

## § 9. Определения с высказываниями

Соглашения, о которых говорилось в *D1* в предшествующем параграфе, суть определения вида: «Пусть предмет $X$ будет высказыванием таким, что $X \equiv Y$» (где $Y$ есть высказывание) или «Вместо $Y$ будем употреблять $X$ как тождественное ему по смыслу». Благодаря таким определениям вводятся либо новые термины, либо новые логические знаки (отсутствующие, естественно, в $Y$). Так что они одновременно суть соглашения считать некоторые предметы, фигурирующие в $X$, терминами или логическими знаками. Очевидно, предмет $X$ должен быть построен так, чтобы иметь структуру высказывания.

Часто вместо выражения «тождественно по смыслу» при определениях, в которых фигурируют высказывания, употребляют выражения «если..., то ...» и «если и только если».

*A1*. $(X \equiv Y) \to (X \dashv\vdash Y)$,

где $X \equiv Y$ есть соглашение, вводящее новый логический знак, или следствие соглашений такого рода.

## § 10. Термины из высказываний

Из всякого высказывания $X$ может быть образован термин

$$\downarrow X,$$

читаемый как «Тот факт, что $X$» (или «То, что $X$»).

*A1*. Если $X$ есть высказывание, то $\downarrow X$ есть термин.

*A2*. $(X \equiv Y) \leftrightarrow (\downarrow X \rightleftarrows \downarrow Y)$

*A3*. $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\downarrow Y \rightharpoonup \downarrow X)$

*T1*. $(t^1 \rightleftharpoons t^2) \rightarrow (X \leftrightarrow X(t^1/t^2))$

(в силу *A1*II8 и *A3*).

Определения, о которых говорилось в предшествующем параграфе, суть модификации определений вида

$$\downarrow X = Df. \downarrow Y.$$

## § 11. Значения истинности

Значения истинности суть термины «истинно», «ложно» и т. п. Будем значения истинности изображать символами

$$v^1,\ v^2,\ \ldots,\ v^n,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ .$$

Надо различать установление смысла терминов $v_i$ и $v_i$ и выяснение значения истинности того или иного данного высказывания. Второе невозможно осуществить, если предварительно не сделано первое. Ниже мы сформулируем общие принципы, касающиеся лишь смысла значений истинности.

Примем обозначения:

1) $X \leftarrow v^i$ — «$X$ имеет значение истинности $v^i$», где $v^i$ есть какое-то из $v^1$, $v^2$,... (например, «$X$ истинно», «$X$ ложно» и т. п.);

2) $\sim (X \leftarrow v^i)$ — «$X$ не имеет значения истинности $v^i$» («$X$ не является истинным», «$X$ не является ложным» и т. п.);

3) $X \approx Y$ — «$X$ и $Y$ равнозначны»;

4) $\sim (X \approx Y)$ — «$X$ и $Y$ не равнозначны».

*D1*. $X \approx Y$, если и только если для любого $v^i$ выполняется условие: каждый раз, когда одно из $X$ и $Y$ имеет значение $v^i$, другое точно так же имеет значение $v^i$, т. е.

$$(X \leftarrow v^i) \leftrightarrow (Y \leftarrow v^i).$$

*T1*. Если $X \approx Y$, то для любого $v^i$

$$\sim ((X \leftarrow v^i) \cdot \sim (Y \leftarrow v^i)) \cdot \sim ((Y \leftarrow v^i) \cdot \sim (X \leftarrow v^i)).$$

Значения истинности вводятся так, чтобы выполнялись требования:

*A1*. $(X \leftarrow v^i) : \sim (X \leftarrow v^i)$

*A2*. $(X \equiv Y) \rightarrow (X \approx Y)$.

*A3*. Если $\sim (X \leftarrow v^i)$, то $X$ имеет какое-то другое значение истинности, отличное от $v^i$.

*D2*. Значения истинности $v^1, \ldots, v^n$ $(n \geqslant 2)$ будем называть основными, если и только если для любой пары $v^i$ и $v^k$ из них выполняется следующее:

$$(X \leftarrow v^i) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^k)$$
$$(X \leftarrow v^k) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^i).$$

*D3*. Комплект основных значений истинности $v^1, \ldots$ $\ldots, v^n$ будем считать полным, если и только если выполняется следующее:

$$(X \leftarrow v^1) : \ldots : (X \leftarrow v^n)$$

*D4*. Значения истинности $v_1, \ldots, v_m$ $(m \geqslant 1)$ будем называть дополнительными к основным, если и только если для каждого $v_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ найдется хотя бы одно основное значение истинности $v^i$, такое, что выполняется утверждение:

$$(X \leftarrow v^i) \rightarrow (X \leftarrow v_j).$$

Среди $v^i$ имеется одно привилегированное значение. Это значение — «истинно». Закрепим за ним номер 1, т. е. будем его изображать символом $v^1$. Оно обладает следующими свойствами.

*A4*. Значение «истинно» $(v^1)$ всегда входит в число основных.

*A5*. $$(X \leftarrow v^1) \leftrightarrow X$$

*A6*. Прочие основные значения определяются через $v^1$ по схеме

$$(X \leftarrow v^i) \equiv (Y \leftarrow v^1),$$

где $v^i$ $(i = 2, \ldots, n)$ зависит от вида $Y$.

Очевидно, что

$$T2.\ ((X \leftarrow v^i) \equiv (Y \leftarrow v^1)) \rightarrow ((X \leftarrow v^i) \leftrightarrow Y).$$

*A7*. Дополнительные значения истинности определяются через основные по схеме

$$(X \leftarrow v_j) \equiv (X \leftarrow v^i) : \ldots : (X \leftarrow v^k),$$

где $v^i, \ldots, v^k$ суть значения из числа основных, а $v_j$ — дополнительное значение.

Дополнительные значения можно ввести также определениями вида

$$(v_j \rightarrow v^i) \cdot \ldots \cdot (v_j \rightarrow v^k) \cdot \sim (v_j \rightarrow v^l),$$

где $v^l$ есть любое значение, отличное от $v^i, \ldots, v^k$.

*T3*. Поскольку все основные значения сводятся к $v^1$, то и дополнительные сводятся к $v^1$.

Если число основных значений принято равным двум и эти значения суть $v^1$ и $v^2$, то:

$$T4.\ (X \leftarrow v^1) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^2)$$

$$T5.\ (X \leftarrow v^2) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^1)$$

Если же число основных значений более двух, то:

$$T6.\ \sim (X \leftarrow v^i) \rightarrow (X \leftarrow v^{k1}) : \ldots : (X \leftarrow v^{km})$$

$$(X \leftarrow v^{k1}) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^i), \ldots, (X \leftarrow v^{km}) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^i),$$

где $v^{k1}, \ldots, v^{km}$ суть все основные значения, отличные от $v^i$.

Значение «ложно» будем обозначать символом $v^n$. Очевидно, в общем случае $\sim (X \leftarrow v^1)$ не будет совпадать с $X \leftarrow v^n$. Так что

$$T7.\ \sim (\sim (X \leftarrow v^1) \rightarrow (X \leftarrow v^n)),$$

$$\sim (\sim (X \leftarrow v^n) \rightarrow (X \leftarrow v^1)).$$

Для самих высказываний о значениях истинности высказываний имеет силу утверждение (согласно *A6*)

$$T8.\ ((X \leftarrow v^i) \leftarrow v^1) \leftrightarrow (X \leftarrow v^i)$$

$$(\sim (X \leftarrow v^i) \leftarrow v^1) \leftrightarrow \sim (X \leftarrow v^i).$$

Для этих высказываний достаточно двух основных значений (в силу принятых выше утверждений и определений).

Поэтому можно принять:

$D5.$ $((X \leftarrow v^i) \leftarrow v^n) \equiv (\sim (X \leftarrow v^i) \leftarrow v^1)$.

$T9.$ Если число основных значений более двух, то

$$\sim ((X \leftarrow v^1) \approx X).$$

В самом деле, если $X \leftarrow v^2$, то при $n = 3$ получим $(X \leftarrow \leftarrow v^1) \leftarrow v^3$. Отсюда получаем важный вывод:

$T10.$ $\sim ((X \leftarrow v^1) \equiv X)$.

Случай, когда невозможно установить значение истинности высказывания, исключается самим способом введения значений истинности. Встречаются случаи, когда невозможно установить, истинно высказывание или ложно. Но это — некоторое третье значение. Для любого значения $v^i$ имеет силу положение:

$A8.$ Если невозможно установить, что $X \leftarrow v^i$, то $\sim (X \leftarrow v^i)$.

Очевидно, что смысл и значение истинности высказывания — не одно и тоже. Более того, можно знать смысл высказывания («понимать» высказывание), но не знать его значение истинности или считать высказывание неистинным (истинным и т. п.). Если исследователю не известен смысл высказывания $X$, то для него высказывание $X \leftarrow v^i$ фактически означает следующее: «Предмет $X$ для кого-то (для каких-то других исследователей) есть высказывание, и $X \leftarrow v^i$». Такая ситуация возможна.

## § 12. Структура высказываний и значения истинности

Определение значений истинности по приведенной в предшествующем параграфе схеме предполагает знание структуры высказываний $X$ и $Y$ ($Y$ подбирается в зависимости от $X$, а не произвольно взятое высказывание). Таким образом, точные определения значений истинности высказываний можно построить лишь после того, как зафиксированы структуры этих высказываний. Определения должны быть даны для каждой структуры. Так что полное определение каждого из значений истинности возможно лишь при условии пересмотра всех структур высказываний. А так как здесь нет априорных границ, то невозможно и окончательно завершенное определение каждого из значений истинности. Изобретение какой-то новой структуры высказываний потребует и особых определений значений истинности применительно к этой структуре.

Определения должны быть даны для каждой структуры потому, что определения, эффективные для одной структуры, не эффективны для другой. Определения надо строить для той или иной структуры, а не через структуру, что не одно и то же. Если дана структура высказывания, то имеют место случаи, когда можно выяснить (а не ввести определением!) значение истинности его, зная значение истинности составных частей. Например, если имеем $X \cdot Y$, то можно выяснить его значение истинности, зная значения истинности $X$ и $Y$. Но это возможно лишь постольку, поскольку уже имеются определения значений истинности для этой структуры. А то, что здесь значения истинности $X \cdot Y$ определены через значения истинности $X$ и $Y$, это есть лишь частный случай.

Поскольку одни структуры высказываний сводятся к другим, то такое сведение возможно и для значений истинности, т. е. возможно определение значений истинности для одних структур через значения истинности для других структур. Благодаря таким определениям становятся возможными утверждения типа

$$(Y^1 \leftarrow v^{i1}) \cdot \ldots \cdot (Y^n \leftarrow v^{in}) \rightarrow (X \leftarrow v^k),$$

где $n \geqslant 1$. Высказывание

$$(Y^1 \leftarrow v^{i1}) \cdot \ldots \cdot (Y^n \leftarrow v^{in})$$

будем при этом называть логическим условием $v^k$-значности $X$ (*D1*). Частный случай — $n = 1$, $Y^1$ есть $X$ и $v^k$ есть $v^1$.

Цель определений, о которых говорится здесь,— для каждого значения истинности $v^k$ перечислить все условия $v^k$-значности высказываний с данной структурой.

## § 13. Число значений истинности

Число основных значений истинности не может быть менее двух, но может быть более двух. Двузначная логика (логическая теория, использующая лишь два основных значения истинности) есть лишь наиболее простой случай или частный случай. Двузначная логика есть наиболее простой случай, если принимается значение $v^1$, а значение $v^2$ есть $\sim (X \leftarrow v^1)$. Двузначная логика есть частный случай, если исключаются случаи и условия, когда высказывания могут принимать другие значения, отличные от истинности и ложности, и рассматривается лишь ограниченный круг истинно-ложных высказываний.

Мы допускаем, что число значений истинности высказываний может быть более двух. В дальнейшем будем использовать как простой двузначный вариант, так и четырехзначный. Будем использовать следующие основные значения:

1) $v^1$ — истинно;
2) $v^2$ — неопределенно;
3) $v^3$ — непроверяемо;
4) $v^4$ — ложно.

Этот комплект основных значений является полным. Будем также использовать следующие дополнительные значения:

1) $nv^1$ — неистинно;
2) $nv^2$ — определенно;
3) $nv^3$ — проверяемо;
4) $nv^4$ — неложно;
5) $nv^1nv^3$ — проверяемонеистинно;
6) $nv^4nv^3$ — проверяемонеложно;
7) $nv^2nv^3$ — проверяемоопределенно.

Значения 1—4 здесь определяются утверждениями:

$$D1.\ (X \leftarrow nv^i) \equiv (X \leftarrow v^k) : (X \leftarrow v^l) : (X \leftarrow v^m),$$

где $v^i$, $v^k$, $v^l$ и $v^m$ суть $v^1$, $v^2$, $v^3$ и $v^4$ во всевозможных перестановках. Значения 5—7 определяются так:

$$D2.\ (X \leftarrow nv^1nv^3) \equiv (X \leftarrow v^2) : (X \leftarrow v^4)$$

$$D3.\ (X \leftarrow nv^4nv^3) \equiv (X \leftarrow v^1) : (x \leftarrow v^2)$$

$$D4.\ (X \leftarrow nv^2nv^3) \equiv (X \leftarrow v^1) : (X \leftarrow v)^4.$$

То, что число значений истинности может быть более двух, есть эмпирически установленный факт. Пусть высказывание есть результат наблюдения и проверка его осуществляется путем сопоставления его с некоторой областью наблюдения. Высказывание содержит по крайней мере две единицы смысла. И сопоставление его с элементами (предметами) данной области наблюдения есть некоторая процедура, состоящая по крайней мере из двух шагов. На каждом шаге возможен положительный или отрицательный результат. Так что имеется возможность для введения по крайней мере четырех различных терминов, обозначающих эти результаты и являющихся значениями истинности.

Если же значение истинности высказывания может быть установлено лишь путем выяснения того, получается оно по правилам логического следования из других высказываний или нет, то возможны по крайней мере такие случаи:

1) из $X$ следует $Y$, и тогда $Y$ считается истинным относительно $X$ ($Y$ доказуемо);

2) из $X$ следует отрицание $Y$, и тогда $Y$ считается неистинным относительно $X$ ($Y$ опровержимо);

3) если из $X$ не следует $Y$ и не следует отрицание $Y$, то $Y$ считается неразрешимым относительно $X$; если для любого $X$ имеет место сказанное выше, то $Y$ неразрешимо вообще.

Нет необходимости рассматривать другие случаи: если факт возможности трех и более исходов при установлении значений истинности высказываний установлен, то он должен быть учтен в логической теории научных знаний. Ограничение двумя значениями в классической логике означает рассмотрение лишь таких случаев, когда возможны лишь два исхода в процессах установления значений истинности высказываний (при проверке высказываний).

## § 14. Истинность

Итак, все значения истинности определяются через истинность. Что же касается самого термина «истинно», то определение его должно быть дано в зависимости от структуры высказываний и способов их получения. Не существует единого определения его, годного для всех случаев высказываний.

Очевидно, это будет иметь силу и для прочих значений, определяемых через него. В общей же форме можно сказать лишь следующее.

Термин «истинно» означает прежде всего, что исследователь принимает высказывание, согласен с тем, что в нем говорится, и т. д. Этот акт согласия, признания и т. д. есть некоторая первично ясная операция, не определяемая в терминах логики.

Но исследователь может по самым различным причинам и мотивам признать высказывание (совершить акт согласия, принятия, признания),— под угрозой наказания, по глупости, из тактических соображений и т. п. Мы, разумеется, должны исключить подобные причины и мотивы, должны допустить абсолютно бесстрашного, принципиального, бескорыстного и достаточно умного исследователя, который признает высказывание лишь в строго определенных случаях. Так что выражение «*X* истинно» (в отличие от выражения «*X* считается истинным») означает: исследователь принимает *X* только потому, что имеет место какой-то из этих случаев. Определить термин «истинно» и, следовательно, высказывание «*X* истинно» — значит перечислить эти случаи. А это может быть осуществлено лишь по мере построения логической теории научных знаний, т. е. по мере рассмотрения конкретных структур высказываний, их взаимоотношений и способов получения (но не в качестве некоей предпосылки ее построения). При этом, разумеется, мы должны считаться с той традицией, которая исторически сложилась в науке, и передать ее нашему допускаемому исследователю.

Известны многочисленные случаи, когда люди добиваются желаемых результатов благодаря тому, что принимают за истинные такие высказывания, которые на самом деле являются ложными. Они совершают те или иные поступки, веря в истинность этих (ложных) высказываний.

Это дает повод принимать за истинные такие высказывания, вера в истинность которых дает желаемый (положительный) эффект в определенной деятельности. Мы исключаем такой прагматический критерий оценки высказываний как истинных, допуская следующее: исследователь принимает высказывание (считает его истинным) независимо от того, к каким последствиям приведет это принятие, если он сам или кто-то другой будет строить на этом свое поведение (руководствоваться им в своих действиях).

Заметим кстати, что часто людей постигают несчастья и в тех случаях, когда они верят в истинность действительно истинных высказываний; отрицание же истины в одних случаях приносит пользу, в других вред. Все это суть внелогические явления.

То, что для высказываний с различной структурой термин «истинно» определяется различно, это очевидно. Например, в определяющей части выражений «$X \cdot Y$ истинно» и «$X : Y$ истинно» будут фигурировать, очевидно, различные выражения (иначе знаки «и» и «или» не будут различаться). Но термин истинно может иметь различное определение и для высказываний с одинаковой структурой, но получаемых различными способами. Например для высказываний «Если $X$, то $Y$» термин «истинно» будет иметь различное определение в зависимости от того, получаются такие высказывания путем опытного исследования эмпирических связей предметов или путем установления логической связи высказываний (в частности, логического следования $Y$ из $X$).

Иллюзия того, что термин «истинно» имеет один и тот же смысл для высказываний с одной и той же (сходной) структурой, создается за счет чисто психологического переноса: смысл этого термина известен для какой-то группы высказываний, и все прочие высказывания со сходной структурой рассматриваются с той же точки зрения. Иллюзия того, что термин «истинно» имеет некий единый смысл для высказываний с разной структурой, создается за счет того, что имеется в виду лишь сам акт признания высказываний и оставляется без внимания то, что заставляет осуществить этот акт.

Для сложных по построению высказываний вопрос об истинности сводится к вопросу об истинности других высказываний. Для простых по построению высказываний, получаемых путем наблюдения (посредством ощущений и восприятий) некоторой области мира (предметов), имеют силу допущения:

1) высказывание, полученное путем наблюдения (т. е. ощущения и восприятия предметов), в некоторой области предметов истинно относительно этой области наблюдения (ошибки в наблюдении исключаются);

2) если дано некоторое $X$ и задана область наблюдения, то $X$ истинно относительно этой области, если и только если оно может быть получено в ней; другими словами, если дано $X$ и задана область наблюдения, то $X$ истинно относительно этой области, если и только если сопоставление элементов $X$ и элементов области наблюдения даст результат, соответствующий определению термина «истинно» для высказываний со структурой, подобной $X$.

## § 15. Проверка

*D1*. Проверка высказывания есть установление его значения истинности.

*D2*. Выбор предметов при проверке высказываний есть проверочный выбор.

Для проверки $X$ необходимо иметь:

1) точные определения значений истинности для высказываний с аналогичной структурой или с аналогичным способом получения;

2) возможность построить такие истинные $Y^1$, ..., $Y^n$ $(n \geqslant 1)$, что $Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n \to (X \leftarrow v^i)$.

## § 16. Локальные и универсальные высказывания

*D1*. Пусть $t$ входит в $X$. Если $X$ имеет одно значение истинности в сопоставлении с одним предметом, обозначаемым $t$, и другое — в сопоставлении с другим предметом $t$, то $X$ есть локальное по $t$ высказывание (значение истинности $X$ зависимо от $t$). Если же $X$ имеет одно и то же значение истинности в сопоставлении с любым предметом $t$, то $X$ есть универсальное по $t$ высказывание (значение истинности $X$ не зависит от $t$). Высказывание локально (универсально), если и только если в него входит (не входит) термин, по которому оно локально (универсально).

Пусть $X^1$, ..., $X^n$ $(n \geqslant 1)$ суть все входящие в некоторое наше утверждение высказывания, значения истинности которых зависят от $t$. Условимся: значения истинности этих высказываний в рамках данного утверждения устанавливаются каждый раз в сопоставлении с одним и тем же предметом, обозначаемым $t$.

## § 17. Метавысказывания

Если высказывание рассматривается в качестве особого предмета, для него может быть введен термин, обозначающий его. Обычно берут для этой цели экземпляр самого высказывания с некоторыми дополнениями или физическими модификациями (кавычки, курсив и т. п.). Условимся термин, обозначающий высказывание $X$, изображать символом

$$[X].$$

Высказывание может рассматриваться просто как предмет вида $X$ и именно как высказывание о чем-то. В первом случае отношение $X$ и $[X]$ есть просто отношение предмета и термина, во втором — высказывания и его, термина, названия. Мы здесь имеем в виду второе.

Для $X$ и $[X]$ имеет силу утверждение:

*A1*. Смысл $X$ не зависит от $[X]$ (известен до образования $[X]$). Смысл же $[X]$ известен, если и только если известен смысл $X$.

С этой точки зрения известный парадокс с двумя «высказываниями», из которых в одном утверждается, что другое истинно, а в другом — что первое ложно, решается тривиально просто: эти «высказывания» на самом деле высказываниями не являются, так как не удовлетворяют *A1* и указанным выше (§ 2) требованиям к смыслу высказываний вообще.

*D1*. Высказывания, в которые входят термины терминов или термины высказываний, суть метавысказывания.

Все утверждения логики о терминах и высказываниях суть метавысказывания. Мы выше не употребляли квадратные скобки (или другие знаки) исключительно из соображений простоты символики, полагая при этом, что из контекста ясно, о чем идет речь. Приведенные выше утверждения точнее будет записать в форме

$$[t^1] \rightarrow [t^2],\ [X] \vdash [Y],\ [X] \equiv [Y]$$

и т. п. Но в таком усложнении нет необходимости: мы не формулируем внелогических утверждений и не вводим внелогических терминов (за исключением примеров), так что смешения терминов и высказываний с метатерминами и метавысказываниями не должно произойти.

# СУБЪЕКТНО-ПРЕДИКАТНЫЕ СТРУКТУРЫ

## § 1. Объекты и признаки

Имеются термины, которые образуются следующим образом:

1) выбирается какой-то предмет $П^1$;

2) в ограниченной таким образом области выбора выбирается некоторый $П^2$, отличный от $П^1$; причем, выбор $П^2$ невозможен без выбора $П^1$; и если выбор $П^2$ осуществлен, то значит осуществлен выбор какого-то $П^1$; какой $П^1$ выбирается для выбора $П^2$, роли не играет; лишь бы выбор $П^1$ давал возможность осуществить выбор $П^2$; указанная здесь зависимость выбора $П^2$ от выбора какого-то другого предмета $П^1$ имеет место при любых допущениях относительно возможностей исследователя (мы ее допускаем);

3) выбираемый таким образом $П^2$ обозначается термином $t^2$ (принимается решение считать предмет вида $t^2$ термином для $П^2$).

Примем определения:

*D1*. Предмет $П^2$ назовем признаком, а $П^1$ — объектом.

*D2*. Термины, обозначающие признаки, суть термины признаков, а обозначающие объекты — термины объектов.

Различение признаков и объектов, как видим, соотносительно. Умение различать термины признаков и объектов в случае простых терминов мы считаем данным.

Примем обозначения:

1) $S$, $S^1$, $S^2$,...— объекты;

2) $P$, $P^1$, $P^2$,...— признаки;

3) $s$, $s^1$, $s^2$,...— термины объектов;

4) $P$, $P^1$, $P^2$,...— термины признаков;

5) $s^*$, $s^{*1}$, $s^{*2}$,...— термины соответственно «объект», «один (какой-то) объект», «другой объект» и т. д.;

6) $P^*$, $P^{*1}$, $P^{*2}$,...— термины соответственно «признак», «один признак», «другой признак» и т. п.

Термины, указанные в пунктах 5 и 6, с одной стороны, суть частный случай терминов, указанных в пунктах 3 и 4, а с другой стороны, они суть предельно общие термины такого рода, т. е. для любого $s$ и $P$

$$s^* \rightarrow s, \; s^{*i} \rightarrow s, \; P^* \rightarrow P, \; P^{*i} \rightarrow P.$$

Из определений следует:

*T1*. Если $t^1$ есть термин объекта, а $t^2$ — термин признака, то для любых $t^1$ и $t^2$

$$\sim (t^1 \rightarrow t^2) \cdot \sim (t^2 \rightarrow t^1).$$

*T2*. Если $t^1 \rightarrow t^2$, $t^1 \rightleftarrows t^2$ или $t^1 \equiv t^2$, то оба $t^1$ и $t^2$ суть термины объекта или оба суть термины признака.

Существование признаков определяется точно так же относительно некоторого способа выбора (экстенциального выбора признака). Только сравнительно с объектами здесь надо сделать следующее дополнение: признак существует, если и только если существует какой-то предмет, выбор которого делает возможным экстенциальный выбор этого признака.

Таким образом, признаки не имеют независимого от объектов существования.

Из определений также следует, что выражение «признак признака» лишено смысла, а утверждение традиционной логики «Признак признака есть признак вещи» по меньшей мере многосмысленно.

## § 2. Простейшие высказывания

Простейшие высказывания образуются из терминов объектов и признаков путем соединения их особыми коннекторами. Последние будем называть коннекторами предикативности (*D*1). При этом одно высказывание образуется из следующих частей: одного и только одного термина объекта, одного и только одного термина признака, одного и только одного коннектора предикативности (*D*2).

$D3$. Термин объекта, входящий в высказывание, указанное в $D2$, будем называть субъектом высказывания, а термин признака — предикатом.

Названные выше элементы высказывания как-то упорядочены (некоторым принятым способом или способами) в пространстве или времени. Субъекты и предикаты независимы по смыслу. Хотя при установлении значения предикатов и выбираются какие-то объекты, это совсем не означает того, что используются данные субъекты.

Напоминаем, что мы рассматриваем знаки (и термины в том числе) как нечто физически неизменное. Поэтому желательно, чтобы читатель отвлекся от тех ассоциаций, которые навязываются ему опытом оперирования обычным языком, и представил себе субъекты и предикаты лишенными каких бы то ни было грамматических свойств, а коннекторы предикативности — как видимые предметы. В таком случае образование высказываний и терминов предстанет совокупностью операций, подобных операциям по сооружению механических конструкций из жестких деталей.

Примем определения:

$D4$. Если $s$ и $P$ суть соответственно термины объекта и признака, то

$$s \leftarrow P,\ s\urcorner \leftarrow P,\ s? \leftarrow P$$

суть высказывания.

$D5$. Символы

$$\leftarrow,\ \urcorner\leftarrow,\ ?\leftarrow$$

суть соответственно коннекторы утверждения, отрицания и неопределенности.

$D6$. Символы

$$\urcorner,\ ?$$

суть соответственно знаки внутреннего отрицания и неопределенности.

В логике вместо нашего символа $s \leftarrow P$ обычно употребляют $P(s)$. Так что символы $\urcorner P(s)$ и $?P(s)$ можно считать вполне адекватными $s\urcorner \leftarrow P$ и $s? \leftarrow P$ соответственно.

Коннектор утверждения «читается» таким образом: «Объект $s$ имеет признак $P$», «$s$ таков, что $P$», «$s$ характеризуется тем, что $P$» и т. п. Эти и другие подобные выражения мы считаем первично ясными, разъясняемыми на примерах. Уместно также следующее пояснение: если выбрали S, то имеется (известен) некоторый способ выбора, посредством которого исключительно в данной области выбора (т. е. не выбирая другие объекты) может быть выбран P (последний обнаруживается как признак первого).

Коннектор отрицания «читается» так: «$s$ не имеет признака $P$», «$s$ не таков, что $P$» и т. п. Его мы точно так же принимаем как первично ясный. Допустимо такое его разъяснение: если выбрали S, то в этой области выбора невозможно обнаружить P.

Известны примеры (во всяком случае, мы вправе допустить их), когда бывает невозможно установить, имеет некоторый объект данный признак или нет. Это имеет место, например, в случае изменения предметов. Такие случаи и фиксируются посредством высказываний со знаком неопределенности.

Генетически способность построения высказываний с отрицаниями (и тем более — со знаками неопределенности), надо думать, предполагает способность построения утверждений. Однако это не следует понимать так, будто построение первых предполагает использование вторых. Все указанные формы высказываний могут быть простыми по построению и независимыми друг от друга (могут, в частности, быть результатом непосредственных наблюдений).

Высказывания $s\alpha \leftarrow P$ (где $\alpha$ означает наличие или отсутствие $\neg$ или ?) строятся и употребляются в данной (определенной, известной) обстановке. Они локализованы в пространстве и времени, так что их можно назвать локальными. Они служат для описания отдельных фактов, событий и т. п. в данных условиях, для описания результатов наблюдений и экспериментов. Потому их иногда называют протокольными. Их ошибочно записывать с ограничением «этот», поскольку их локализация предполагается как нечто внешнее и касается их употребления, но не фиксируется в их структуре. Поэтому они могут использоваться неоднократно и в разных условиях.

Например, многие люди и неоднократно высказывают «Частица заряжена отрицательно», но все эти случаи суть лишь экземпляры одного и того же высказывания, а не разные высказывания.

Рассматриваемые высказывания перестают быть локальными, если класс предметов, о которых говорится в них, состоит всего из одного предмета. Но при этом они не сами по себе перестают быть локальными, а лишь в соединении со знанием того, что существует всего один предмет, обозначаемый его субъектом. Обычно это дополнительное знание явно не формулируется. Но оно при этом есть. Так что в данном случае имеет место не простое, а сложное высказывание. Высказывания «Этот $s\alpha \leftarrow P$» точно так же не являются простейшими: если слово «этот» указывает на какие-то способы выбора (например, на жесты в данных условиях), то оно не есть элемент структуры высказывания; оно говорит лишь о том, что $s\alpha \leftarrow P$ локально; если же слово «этот» указывает на наличие в высказывании каких-то терминов, описывающих данную индивидуальную ситуацию, то высказывание не является простейшим.

Рассматривать $s \leftarrow P$ как высказывание о включении S в класс P (а иногда так делают) нельзя. Во-первых, высказывание о включении в класс есть высказывание о двух объектах и имеет вид «$t^1$ включается в класс $t^2$». Во-вторых, S может включаться в класс объектов, имеющих признак P, а не в класс признаков P, так что высказывание о принадлежности признака объекту все равно предполагается как более простое.

Нельзя рассматривать $s \leftarrow P$ и как высказывания «$s$ есть $P$» (а иногда так делают). Высказывания с «есть» могут пониматься различно: как $t^1 \rightarrow t^2$, как $t^1 \rightleftarrows t^2$, как $t^1 \equiv t^2$, как фиксирование того, что из элементов некоторого класса выбран такой-то и т. д. Но при всех обстоятельствах требуется, чтобы термины были однопорядковыми — оба субъекты или оба предикаты. Все сказанное относится и к высказываниям с отрицанием и неопределенностями.

## § 3. Высказывания существования

Вместо слова «существует» (в определенном выше смысле) будем употреблять символ $E$. Условимся считать $E$ простым предикатом со следующим ограничением: он исключается из числа предикатов, на которые автоматически распространяются положения какой-то логической теории, не содержащие $E$, и каждый раз надо либо специально вводить утверждения для высказываний с $E$, либо специально оговаривать, что такие-то утверждения имеют силу и для них. Другими словами, $E$ не есть частный случай тех предикатов, которые обозначаются у нас символами $P$, $P^1$, $P^2$,... .

Мы используем $E$ как специальный термин логики науки для описания свойств знаний в том значении, определение которого было дано выше. Если же он используется в той или иной науке наряду с ее терминологией, то в каждом случае должно быть указано, заменой какого множества высказываний без него являются высказывания, содержащие его.

Высказывания $s \leftarrow E$ и $s \neg\leftarrow E$ локальны в том смысле, что в одних условиях может существовать S, а в других — нет. Но они могут употребляться и безусловно (в смысле: S существует или не существует вообще). Известны случаи, когда невозможно установить (или не известно), существует предмет или нет. Соответствующие высказывания имеют вид $s? \leftarrow E$. Символы $E\ (s)$, $\neg E\ (s)$ и $?\ E\ (s)$ вполне адекватны приведенным выше.

## § 4. Два вида объектов и признаков

Объекты разделяются на две группы следующим образом:

1) к первой группе относятся объекты, для которых исключается возможность того, что $(s? \leftarrow E)$;

2) ко второй группе относятся объекты, для которых такая возможность не исключается.

Аналогично признаки разделяются на две группы таким образом:

1) к первой группе относятся признаки, для которых исключается возможность того, что $(s \leftarrow E) \cdot (s? \leftarrow P)$.

2) ко второй группе относятся признаки, для которых такая возможность не исключается.

*D*1. Объекты и признаки первой группы будем называть классическими, а второй группы — неклассическими.

Утверждения логики для неклассических объектов и признаков являются более общими, чем утверждения для классических объектов и признаков: последние получаются из первых как частный случай путем вычеркивания всех высказываний (и терминов) со знаком неопределенности.

## § 5. Внешнее отрицание

Примем утверждения, определяющие внешнее отрицание:

$$A1.\quad \sim(s \leftarrow E) \equiv (s\urcorner \leftarrow E) : (s? \leftarrow E)$$
$$\sim(s\urcorner \leftarrow E) \equiv (s \leftarrow E) : (s? \leftarrow E)$$
$$(s? \leftarrow E) \equiv (s \leftarrow E) : (s\urcorner \leftarrow E).$$

$$A2.\quad \sim(s \leftarrow P) \equiv \sim(s \leftarrow E) : (s\urcorner \leftarrow P) : (s? \leftarrow P)$$
$$\sim(s\urcorner \leftarrow P) \equiv \sim(s \leftarrow E) : (s \leftarrow P) : (s? \leftarrow P)$$
$$\sim(s? \leftarrow P) \equiv \sim(s \leftarrow E) : (s \leftarrow P) : (s\urcorner \leftarrow P).$$

Знак неопределенности кажется возможным определить как производный утверждениями

$$(s? \leftarrow E) \equiv \sim(s \leftarrow E) \cdot \sim(s\urcorner \leftarrow E)$$
$$(s? \leftarrow P) \equiv \sim(s \leftarrow P) \cdot \sim(s\urcorner \leftarrow P).$$

Но при этом должно быть принято как первично ясное внешнее отрицание и его отличие от внутреннего. Но различить эти отрицания без ссылки на третью возможность, т. е. на неопределенность, нельзя. Так что этот путь отпадает.

«Классический» случай определяется утверждениями:

$$A3.\quad \sim(s? \leftarrow E) \rightarrow (\sim(s \leftarrow E) \equiv (s\urcorner \leftarrow E))$$
$$\sim(s? \leftarrow E) \rightarrow (\sim(s\urcorner \leftarrow E) \equiv (s \leftarrow E))$$

$$A4.\quad \sim(s? \leftarrow P) \cdot (s \leftarrow E) \rightarrow (\sim(s \leftarrow P) \equiv (s\urcorner \leftarrow P))$$
$$\sim(s? \leftarrow P) \cdot (s \leftarrow E) \rightarrow (\sim(s\urcorner \leftarrow P) \equiv (s \leftarrow P))$$

Из $A3$ — $A4$ очевидно, что утверждения

$$\sim(s \leftarrow P) \dashv\vdash (s\urcorner \leftarrow P),\quad \sim(s \leftarrow E) \dashv\vdash (s\urcorner \leftarrow E)$$
$$\sim(s\urcorner \leftarrow P) \dashv\vdash (s \leftarrow P),\quad \sim(s\urcorner \leftarrow E) \dashv\vdash (s \leftarrow E)$$

правильны лишь для классических объектов и признаков и неправильны для неклассических, т. е. неприемлемы в общем («неклассическом») случае.

Уже из рассмотрения элементарных высказываний видно, что надо различать два типа отрицания, которые не всегда совпадают формально. Взаимоотношение их таково. Смысл внутреннего отрицания ясен в силу его положения в высказывании. Внешнее же отрицание должно быть определено через внутреннее для каждой структуры высказываний. Но такого рода определения не являются абсолютно произвольными. Общее отрицание имеет некоторый самостоятельный смысл, не зависящий от частного. В частности, смысл его можно пояснить так: если некто утверждает $X$, а другой говорит «нет», «не так», то этот другой утверждает $\sim X$. Формально же оно определяется системой утверждений вроде

$$\sim\sim X \vdash X,\ X \vdash \sim\sim X,\ X : \sim X,\ \sim(X \cdot \sim X)$$

и т. п., которую мы полностью приведем ниже. И при определении внешнего отрицания через внутреннее для конкретных структур высказываний с такого рода определениями надо считаться, т. е. должна быть согласованность этих двух путей установления свойств внешнего отрицания.

## § 6. Термины

Из $s$, $P$ и $\leftarrow$ образуются следующие термины:

1) $s \downarrow P$ — «$s$, который имеет $P$», «$s$, который $P$», «$s$, имеющий $P$», «$s$ такой, что $P$» и т. п.;

2) $\downarrow(s \leftarrow P)$ — «то, что $s \leftarrow P$», «тот факт, что $s \leftarrow P$»;

3) $P \downarrow s$ — «$P$, присущий $s$», «$P$ объекта $s$», «$P$ такой, какой присущ $s$ (какой имеет $s$)».

Аналогично из $s$, $P$, $\urcorner\leftarrow$ и $?\leftarrow$ образуются термины:

1) $s \urcorner \downarrow P$, $s? \downarrow P$

2) $\downarrow(s \urcorner \leftarrow P)$, $\downarrow(s? \leftarrow P)$

3) $P \urcorner \downarrow s$, $P? \downarrow s$.

Термин $P \urcorner \downarrow s$ «читается» так: «$P$ не такой, какой присущ $s$ (какой имеет $s$)».

Из $s$, $E$ и $\alpha \leftarrow$ получаются термины:

1) $s \downarrow E$, $s \urcorner \downarrow E$, $s? \downarrow E$

2) $\downarrow(s \leftarrow E)$, $\downarrow(s \urcorner \leftarrow E)$, $\downarrow(s? \leftarrow E)$

3) $E \downarrow s$, $E \urcorner \downarrow s$, $E? \downarrow s$.

Последний «читается» так: «Существует в том же (не в том же; неопределенно) смысле, в каком существует (не существует; неопределенно) $s$».

Особый случай терминов рассматриваемого типа получается тогда, когда в качестве $s$ и $P$ берутся термины «объект» ($s^*$) и «признак» ($P^*$). Например, $s^* \downarrow P$ есть «Объект, имеющий $P$». При этом не любые сочетания практически полезны. Так, $s^* \downarrow P^*$ совпадает с $s^*$, поскольку любой объект имеет какой-то признак; $P \downarrow s^*$ совпадает с $P$, поскольку всякий признак есть признак каких-то объектов.

В дальнейшем для общности формулировок будем употреблять перед $\leftarrow$ и $\downarrow$ буквы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha^1$, $\alpha^2$,... в таком смысле: каждая из них по отдельности будет означать наличие или отсутствие $\urcorner$ или ?, а смысл их различия в одном утверждении будет оговорен в каждом случае.

Сказанное выше о терминах можно закрепить таким формальным соглашением:

*D*1. Если $s$ есть термин объекта, а $P$ есть термин признака, то

$$s\alpha \downarrow P, \ \downarrow (s\alpha \leftarrow P), \ P\alpha \downarrow s, \ s\alpha \downarrow E, \ \downarrow (s\alpha \leftarrow E), \ E\alpha \downarrow s$$

суть термины; при этом

$$P\alpha \downarrow s, \ E\alpha \downarrow s$$

суть термины признаков, а остальные — объектов.

Укажем некоторые свойства терминов, фигурирующих в *D*1 (не претендуя на полноту их описания). При этом будем считать, что в рамках одного утверждения тождество символов означает тождество соответствующих предметов. Будем также считать, что для всех высказываний, фигурирующих в одном утверждении, предполагается тождество времени и места выбора предметов.

*A*1. $s\alpha \leftarrow (P\alpha \downarrow s), \ s\alpha \leftarrow (E\alpha \downarrow s)$

*A*2. $(s\alpha \downarrow P)\alpha \leftarrow P, \ (s\alpha \downarrow E) \leftarrow E$

*A*3. $(s\alpha \downarrow P^1)\beta \downarrow P^2 \equiv (s\beta \downarrow P^2)\alpha \downarrow P^1,$

где $\alpha$ и $\beta$ различны или тождественны в любых комбинациях

*A*4. $s \rightarrow s\alpha \downarrow P, \ s \rightarrow s\alpha \downarrow E$

*A*5. $s^* \downarrow (P \downarrow s) \rightarrow s, \ P^* \downarrow (s \downarrow P) \rightarrow P$

*A*6. $\sim s^1 \rightarrow (s^2 \urcorner \downarrow (P \downarrow s^1)), \sim s^1 \rightarrow (s^2 ? \downarrow (P \downarrow s^1))$

$\sim s^1 \rightarrow (s^2 \downarrow (P \urcorner \downarrow s^1)), \ \sim s^1 \rightarrow (s^2 \downarrow (P ? \downarrow s^1))$

A 7. $(s\alpha \leftarrow P) \rightarrow (s^*\alpha \downarrow P \rightarrow s)$

$(s\alpha \leftarrow E) \rightarrow (s^*\alpha \downarrow E \rightarrow s)$

A 8. $(s\alpha \leftarrow P) \rightarrow (P^*\alpha \downarrow s \rightarrow P)$

Из $A1$ II 8 следует:

T 1. $(s^1 \rightarrow s^2) \rightarrow (s^1\alpha \downarrow P \rightarrow s^2\alpha \downarrow P)$

T 2. $(P^1 \rightarrow P^2) \rightarrow (s\alpha \downarrow P^1 \rightarrow s\alpha \downarrow P^2)$

T 3. $(s^1 \rightarrow s^2) \cdot (P^1 \rightarrow P^2) \rightarrow (s^1\alpha \downarrow P^1 \rightarrow s^2\alpha \downarrow P^2)$.

Из сказанного должно быть ясно, что различие субъекта и предиката идет глубже, нежели различие их положения в высказывании. Так, если мы имеем высказывание $s\alpha \leftarrow P$, то простая перестановка $s$ и $P$ не дает высказывания, т. е. предмет вида $P\alpha \leftarrow s$ не есть высказывание. Чтобы получить высказывание такое, в котором $P$ и $s$ меняются местами, надо построить структуру $(s^* \downarrow P)\ \alpha \leftarrow (P^* \downarrow \downarrow s)$, $(s^*\alpha \downarrow P) \leftarrow (P^* \downarrow s)$ и т. п.

Для предикатов имеет силу утверждение:

A 9. $(P^1 \rightarrow P^2) \leftrightarrow ((s \downarrow P^2) \leftarrow P^1) \cdot ((s \urcorner \downarrow P^1) \urcorner \leftarrow P^2) \cdot$
$\cdot ((s? P^1)? \leftarrow P^2)$

T 4. $(P^1 \rightarrow P^2) \cdot (s \leftarrow P^2) \rightarrow (s \leftarrow P^1)$

$(P^1 \rightarrow P^2) \cdot (s \urcorner \leftarrow P^1) \rightarrow (s \urcorner \leftarrow P^2)$

$(P^1 \rightarrow P^2) \cdot (s? \leftarrow P^1) \rightarrow (s? \leftarrow P^2)$.

Для субъектов имеют силу утверждения:

A 10. $(s^1 \rightarrow s^2) \cdot (s^2 \leftarrow E) \rightarrow (s^1 \leftarrow E)$

$(s^1 \rightarrow s^2) \cdot (s^1 \urcorner \leftarrow E) \rightarrow (s^2 \urcorner \leftarrow E)$

$(s^1 \rightarrow s^2) \cdot (s^1? \leftarrow E) \rightarrow \sim (s^2 \leftarrow E)$

A 11. $(s \leftarrow E) \cdot ((s \downarrow P) \urcorner \leftarrow E) \rightarrow (s \urcorner \downarrow P) \leftarrow E$

$(s \leftarrow E) \cdot ((s \downarrow P)? \leftarrow E) \rightarrow (s? \downarrow P) \leftarrow E$,

A12. $P \downarrow s$ есть индивидуальный термин, если и только если $s$ есть индивидуальный термин.

Следствия $A10$:

T 5. $((s\alpha \downarrow P \leftarrow E) \rightarrow (s \leftarrow E)$

$(s \urcorner \leftarrow E) \rightarrow ((s\alpha \downarrow P) \urcorner \leftarrow E)$

$(s? \leftarrow E) \rightarrow \sim ((s\alpha \downarrow P) \leftarrow E)$.

$D2$. Если $P$ предикат, то $s(p)$ (читается как «способность $s$ иметь $P$») есть субъект.

$D3$. $(s(p) \leftarrow E) \leftrightarrow ((s \downarrow P) \leftarrow E)$

$A13$. $(s \leftarrow P) \cdot (s^*(p)\alpha \leftarrow Q) \rightarrow ((s \downarrow P)\alpha \leftarrow Q)$

$T6$. $(P^i \rightleftharpoons P^k) \rightarrow (s(p^i) \rightleftharpoons s(p^k))$

## § 7. Определения

Определения терминов признаков (предикатов) могут иметь такой вид:

1) $s\alpha \leftarrow P^i \equiv s\beta \leftarrow P^k$,

где $P^i$ есть вновь вводимый термин, $P^k$ и $s$ суть термины, $s$ может быть $s^*$, $\alpha$ и $\beta$ могут быть различными или тождественными;

2) $s\alpha \leftarrow P^i \equiv (s\beta^1 \leftarrow P^1) \cdot \ldots \cdot (s\beta^n \leftarrow P^n)$,

где $n \geqslant 2$, $P^i$ вводимый термин, $P^1, \ldots, P^n$ и $s$ суть термины, $\alpha$, $\beta^1, \ldots, \beta^n$ попарно тождественны или различны в каком-то сочетании;

3) $s\alpha \leftarrow P^i \equiv (s\beta^1 \leftarrow P^1) : \ldots : (s\beta^n \leftarrow P^n)$;

4) $s\alpha \leftarrow P^i \equiv X^1 : \ldots : X^m$,

где $m \geqslant 2$, $X^1, \ldots, X^m$ суть высказывания, имеющие вид $(s\beta^{i1} \leftarrow P^{i1}) \cdot \ldots \cdot (s\beta^{ik} \leftarrow P^{ik})$, где $k \geqslant 1$.

Благодаря такого рода определениям в рамках самой логики возможны следующие обобщения понятия признака и, соответственно, предиката.

$D1$. $s \leftarrow \neg P \equiv s \neg \leftarrow P$, $s \leftarrow ?P \equiv s? \leftarrow P$

$D2$. $s \leftarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n) \equiv (s \leftarrow P^1) \cdot \ldots \cdot (s \leftarrow P^n)$

$D3$. $s \leftarrow (P^1 : \ldots : P^n) \equiv (s \leftarrow P^1) : \ldots : (s \leftarrow P^n)$

$D4$. $\neg P$, $?P$, $P^1 \cdot \ldots \cdot P^n$, $P^1 : \ldots : P^n$ — термины признаков.

Теперь в качестве частного случая $P$ можно рассматривать термины

$$P^1 \cdot P^2, \quad \neg P^1 \cdot ?P^2 \cdot P^3, \quad \neg P^1 \cdot (P^2 : \neg P^3)$$

и т. п. Приведенная выше в пункте 1 схема определения терминов признаков теперь выступает как общая, охватывающая схемы 2—4 как частные случаи.

Свойства терминов, указанных в $D2$ и $D3$, зависят от свойств знаков $\cdot$ и : (их мы определим в следующей главе). Свойства терминов, указанных в $D1$, определяются утверждениями:

$$A1.\ s \urcorner \leftarrow \urcorner P \equiv s \leftarrow P$$
$$s? \leftarrow \urcorner P \equiv s ? \leftarrow P$$
$$s \urcorner \leftarrow ? P \equiv (s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P)$$
$$s? \leftarrow ? P \equiv s? \leftarrow P.$$

Для терминов, введенных по первой схеме определения, имеет силу утверждение:

$$A2.\ ((s \leftarrow P^i) \equiv (s \leftarrow P^k)) \to (P^i \rightleftharpoons P^k).$$

Следствие из $A2$ и $T1$ II 8:

$$T1.\ ((s \leftarrow P^i) \equiv (s \leftarrow P^k)) \to (s \downarrow P^i \rightleftharpoons s \downarrow P^k).$$

При определении терминов признаков (предикатов) определяются не сами по себе знаки $P$, но содержащие их высказывания $s \leftarrow P$ или $s^* \leftarrow P$. Это обстоятельство особенно важно иметь в виду при выяснении смысла таких терминов, как «истинно», «ложно», «существует» и т. п. Нелепо ставить вопросы «Что есть истина?», «Что есть существование?» и т. п. Разумны лишь вопросы о смысле выражений «$[X]$ истинно»; «$[X]$ ложно», «$s$ существует» и т. п., да и то лишь при том условии, что заданы какие-то дополнительные сведения относительно $X$ и $s$ (структура, тип объекта и т. п.).

Термины объектов определяются по схеме

$$s^1 = Df.\, s^2 \downarrow P,$$

где $s^2$ может быть $s^*$, а $P$ есть предикат в обобщенном выше смысле. В другой форме: «Если $s^2 \leftarrow P$, то $s^2$ будет называться $s^1$». Это определение обладает свойством:

$$A3.\ (s^1 \equiv Df.\, s^2 \downarrow P) \to (s^1 \leftarrow P)$$

Пусть $D^i$ есть определение $s^1$ такое, что «Если $D^i$, то $s^1 \leftarrow P$». В таком случае:

$$A4.\ (s^2 \urcorner \leftarrow P) \to \sim (s^1 \rightharpoonup s^2)$$
$$(s^2 ? \leftarrow P) \to \sim (s^1 \rightharpoonup s^2).$$

Благодаря $A3$ создается возможность строить определения, которые отличаются от определений по только что приведенной схеме (их называют эксплицитными) тем, что имеют форму аксиом: в этом случае просто принимают утверждения типа

$$s^1\alpha^1 \leftarrow P^1, \ldots, s^1\alpha^n \leftarrow P^n,$$

в неявной форме предполагая, что

$$s^1 = Df. \, s^2 \downarrow (\alpha^1 P^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^n P^n).$$

Эту запись определений называют имплицитными определениями.

Из сказанного должно быть ясно, почему определения фигурируют в качестве посылок в рассуждениях (в выводах). Кроме того, согласно $A5$ III 7 имеет силу утверждение:

$T\,1.$ $(t^1 \rightleftharpoons t^2) \cdot X \rightarrow X(t^1/t^2)$,

где $t^1 \rightleftharpoons t^2$ может быть определением или следствием его согласно принятым утверждениям.

## § 8. Правила замены терминов

Определения по приведенным схемам одноактны, т. е. суть соглашения относительно смысла вполне определенных отдельных терминов. Правила замены терминов суть некоторые стандартные правила получать новые термины из данных, имеющие силу для некоторых классов терминов,— они могут служить неоднократно (для различных наборов данных терминов). Они используются для получения новых терминов признаков и действуют следующим образом: 1) имеются правила получения из данных предикатов определенного вида новых предикатов; 2) из данных высказываний $s \leftarrow P^1, \ldots, s \leftarrow P^n$ по этим правилам получается высказывание $s \leftarrow P$. Примеры: из высказываний «$s$ весит $a^1$ кг»,..., «$s$ весит $a^n$ кг» получается по такого рода правилам высказывание «$s$ весит в среднем $b$ кг»; из высказываний «$s$ прошел расстояние $a$ км» и «$s$ затратил на это $b$ часов» получается высказывание «$s$ имеет скорость $c$ км/час».

Обращаем внимание на следующее: термин $P$ здесь не определяется через $P^1, \ldots, P^n$; он имеет смысл независимо от них. И высказывание $s \leftarrow P$ имеет смысл независимо от $s \leftarrow P^1, \ldots, s \leftarrow P^n$. Правила же, о которых идет речь, во-первых, дают определение некоторого термина $P^k$ такого, что $P^k \rightharpoonup P$, через термины $P^{i1}, \ldots, P^{in}$ такие, что $P^{i1} \rightharpoonup P^1, \ldots, P^{in} \rightharpoonup P^n$; во-вторых, они позволяют для данных $P^1, \ldots, P^n$ из области значения $P^{i1}, \ldots, P^{in}$ соответственно отыскивать определенный $P$ из области значения $P^k$ (т. е. $P^k$ есть функция от аргументов $P^{i1}, \ldots, P^{in}$).

## § 9. Индивидуализация терминов

*D*1. Индивидуализацией термина $s$ будем называть построение термина $s \downarrow P$ такого, который является индивидуальным. При этом $P$ есть индивидуализирующий предикат. Общепринятым способом индивидуализации является указание места и времени существования объекта. Но обычно индивидуализирующие части терминов отделяются от основы (т. е. от $s$), выносятся во вне как нечто общее многим употребляемым в данном контексте терминам или вообще предполагаются неявным образом.

## § 10. Значения истинности

Вместо символов $X \leftarrow v^i$ и $\sim (X \leftarrow v^i)$ будем использовать $[X] \leftarrow v^i$ и $[X]\urcorner \leftarrow v^i$. Тот факт, что для значений истинности исключены неопределенности, запишется аксиомой:

$$A1. \ \sim([X] \leftarrow v^i) \equiv ([X]\urcorner \leftarrow v^i).$$

Предметы, обозначаемые терминами $sa \downarrow P$ и $sa \downarrow E$, будем записывать символами $\mathrm{S}a \downarrow \mathrm{P}$ и $\mathrm{S}a \downarrow \mathrm{E}$. Примем следующие «описательные» определения $v^1$ (истинности):

*D*1. $[sa \leftarrow E] \leftarrow v^1$, если и только если $[sa \leftarrow E]$ сопоставляется с $\mathrm{S}^i a \downarrow \mathrm{E}$, где $\mathrm{S}^i$ есть индивид из области значения $s$.

*D*2. $[sa \leftarrow P] \leftarrow v^1$, если и только если $[(sa \downarrow P) \leftarrow E] \leftarrow v^1$ и $[sa \leftarrow P]$ сопоставляется с $\mathrm{S}^i a \downarrow \mathrm{P}$, где $\mathrm{S}^i$ есть индивид из области значения $s$.

Примем, далее следующие определения прочих основных значений истинности:

$$D3. \ ([s \leftarrow E] \leftarrow v^4) \equiv ([s\urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^1)$$
$$([s\urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^4) \equiv ([s \leftarrow E] \leftarrow v^1)$$
$$([s? \leftarrow E] \leftarrow v^4) \equiv ([s \leftarrow E] \leftarrow v^1) : ([s\urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^1)$$

$D4.$ $([s \leftarrow P] \leftarrow v^4) \equiv ([s \urcorner \leftarrow P] \leftarrow v^1)$

$([s \urcorner \leftarrow P] \leftarrow v^4) \equiv ([s \leftarrow P] \leftarrow v^1)$

$([s? \leftarrow P] \leftarrow v^4) \equiv ([s \leftarrow P] \leftarrow v^1) : ([s \urcorner \leftarrow P] \leftarrow v^1)$

$D5.$ $([s \leftarrow E] \leftarrow v^2) \equiv ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^1)$

$([s \urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^2) \equiv ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^1)$

$D6.$ $([s \leftarrow P] \leftarrow v^2) \equiv ([s? \leftarrow P] \leftarrow v^1)$

$([s \urcorner \leftarrow P] \leftarrow v^2) \equiv ([s? \leftarrow P] \leftarrow v^1)$

$D7.$ $([s \leftarrow P] \leftarrow v^3) \equiv ([s \urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^1) : ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^1)$

$([s \urcorner \leftarrow P] \leftarrow v^3) \equiv ([s \urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^1) : ([s? \leftarrow E] \leftarrow$
$\leftarrow v^1)$

$([s? \leftarrow P] \leftarrow v^3) \equiv ([s \urcorner \leftarrow E] \leftarrow v^1) : ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^1).$

Из определений следует:

$T1.$ $([s\alpha \leftarrow P] \leftarrow v^1) \rightarrow ([s \leftarrow E] \leftarrow v^1)$

$T2.$ $([\sim (s\alpha \leftarrow P)] \leftarrow v^1) \rightarrow ([s \leftarrow E] \leftarrow v^1)$

## § 11. Высказывания об энках предметов

В науке приходится иметь дело не только с отдельными предметами, но и с парами, тройками и т. д. предметов, вообще — с энками предметов. Последние будем изображать символами

$$(\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n),$$

а соответствующие им термины — символами

$$(t^1, \ldots, t^n).$$

Примем следующие определения и дополнения к ранее принятым соглашениям.

*D*1. Предмет П есть энка (П); предметы $\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n$ $(n \geqslant 2)$, для любой пары $\text{П}^i$ и $\text{П}^k$ из которых выполняется $\sim (t^i \rightarrow t^k)$, образуют энку предметов $(\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n)$; предметы $\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n$ при этом суть элементы энки.

*D*2. Каждая энка предметов есть предмет.

*D*3. Выбрать энку предметов $(\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n)$ — значит выбрать все ее элементы $\text{П}^1, \ldots, \text{П}^n$ в указанном порядке.

*D*4. Если $t^1, \ldots, t^n$ суть термины, то $(t^1, \ldots, t^n)$ есть энка терминов; последняя есть, в свою очередь, термин.

Если $П^1, \ldots, П^n$ различаются лишь как один, другой и т. д. П, то энка терминов $(t^1, \ldots, t^n)$ может принимать вид «два (пара) $t$», «три $t$»,..., «эн $t$». Возможны также термины «эн предметов», «эн признаков», «эн объектов».

Существование энки определяется утверждениями:

$A1$. Энка существует, если и только если существует каждый ее элемент; энка не существует, если и только если не существует по крайней мере один из ее элементов; невозможно установить, существует энка или нет, если и только если по крайней мере для одного ее элемента невозможно установить, существует он или нет, а все остальные элементы существуют.

Утверждение $A1$ можно записать в такой форме:

$$((s^1, \ldots, s^n) \leftarrow E) \equiv (s^1 \leftarrow E) \cdot \ldots \cdot (s^n \leftarrow E)$$

$$((s^1, \ldots, s^n) \urcorner \leftarrow E) \equiv (s^1 \urcorner \leftarrow E) \bigvee \ldots \bigvee (s^n \urcorner \leftarrow E)$$

$$((s^1, \ldots, s^n)? \leftarrow E) \equiv ((s^1? \leftarrow E) \bigvee \ldots \bigvee (s^n? \leftarrow E)) \cdot$$

$$\cdot \sim (s^1 \urcorner \leftarrow E) \cdot \ldots \cdot \sim (s^n \urcorner \leftarrow E),$$

где $\bigvee$ означает «по крайней мере одно из».

Соотношение терминов, входящих в энку терминов, и самой энки определяется утверждениями:

$A2$. $(t^i \rightarrow t^k) \rightarrow ((t^1, \ldots, t^n) \rightarrow (t^1, \ldots, t^n)(t^i/t^k))$,

где $t^i$ есть любой из $t^1, \ldots, t^n$.

$A3$. $\sim (t^i \rightarrow (t^1, \ldots, t^n)), \sim ((t^1, \ldots, t^n) \rightarrow t^i)$.

$D5$. В зависимости от числа объектов, которые необходимо выбрать для выбора признака при построении обозначающего его термина, будем говорить об одноместных, двуместных и т. д., вообще — об энместных признаках и, соответственно, терминах признаков.

$D6$. Одноместный признак называют свойством, двух и более местный — отношением. Отношение есть признак энки из двух или более объектов.

$D7$. Энка объектов есть объект.

$D8$. Правило образования высказываний с энместными предикатами (или высказываний об энках предметов):

1) одно высказывание образуют два и только два термина, из которых один есть термин объекта, а другой — предиката, и коннектор;

2) если термин признака является энместным, то в энке терминов, являющейся термином объекта, должно быть соответствующее число (эн) терминов.

*D*9. Термин объекта, указанный в *D*8, есть субъект высказываний, а термин признака — предикат.

Будем такие высказывания изображать символами типа

$$(s^1,\dots,s^n)\,\alpha\leftarrow P,\qquad (s^1,\dots,s^n)\,\alpha\leftarrow E.$$

В связи с тем, что высказывания строятся по правилам данного языка, которые не считаются с абстракциями и допущениями логики, то строгая локализация субъекта и предиката может быть достигнута лишь посредством следующей операции (пусть $X$ есть высказывание, состоящее из субъекта, предиката и коннектора и не содержащее других частей):

1) из $X$ извлекаются все $s^1,\dots,\ s^n$, и из них образуют энку терминов — субъект данного высказывания: мы при этом допускаем, что изымаются именно термины объектов и извлекаются все (навык такой имеется);

2) в пустые места вписываются (вставляются) термины $s^{*1},\dots,\ s^{*n}$ так, что индексы у $s^*$, фиксирующие порядковые номера выбора объектов, соответствуют последовательности $s^1,\dots,\ s^n$ в субъекте; полученное высказывание есть

$$X\,(s^1,\dots,s^n/s^{*1},\dots,s^{*n});$$

3) высказывание $X$ можно теперь записать в форме «$(s^1,\dots,\ s^n)$ имеет тот признак, что $X\,(s^1,\dots,\ s^n/s^{*1},\dots,\ s^{*n})$»; если $X^*$ есть такая запись, то

$$X\equiv X^*.$$

Например, высказывание «$s^1$ находится между $s^2$ и $s^3$» примет вид «$(s^1,\ s^2,\ s^3)$ таковы, что первый находится между вторым и третьим». Для $E$ подобная операция не требуется.

Приведенная операция не есть нечто, придуманное специально в интересах логики и только логики. Дело в том, что предикат в $X$ имеет смысл независимо от объекта, а установлен он может быть таким путем, который в обобщенной форме и описывает эта операция.

На высказывания с многоместными предикатами распространяется все, сказанное о высказываниях с одноместными предикатами как на частный случай, поскольку энка терминов, образующая субъект, и многоместный предикат суть соответственно субъект и предикат, которые можно рассматривать как нечто нерасчлененное, элементарное. Но в связи с тем, что здесь субъект может включать в себя более одного термина, возникают дополнительные возможности. Мы ниже ограничимся тем, что приведем основные из этих дополнений.

## § 12. Правила трансформации и термины

Пусть $X$ есть $(s^1,\ldots, s^n)\ a \leftarrow P$ или $(s^1,\ldots, s^n)\ a \leftarrow E$. Ему можно придать вид $(1 \leqslant m \leqslant n)$:

1) «$s^i$ имеет тот признак (таков), что $X$»
2) «$s^i$ имеет тот признак, что $X\ (s^i/s^*)$»
3) «$(s^{i1},\ldots, s^{im})$ имеет тот признак, что $X$»
4) «$(s^{i1},\ldots,s^{im})$ имеет тот признак, что $X(s^{i1},\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots \ldots, s^{*m})$».

Условимся символами

$$PX,\ PX\,(s^i/s^*),\ PX\,(s^{i1},\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots, s^{*m})$$

обозначать получающиеся таким путем предикаты. Так как указанное разбиение есть лишь изменение нашей точки зрения на $X$, то значение истинности $X$ не меняется. Так что имеют силу утверждения:

$$A\,1.\ \ X \leftrightarrow (s^i \leftarrow PX^0),\ \ X \leftrightarrow ((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow PX^0),$$

где $X^\circ$ может быть $X$ и $X\ (s^i/s^*)$ или $X\ (s^1,\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots s^{*m})$. Примем также

$$A\,2.\ \ ((s^1, s^2, s^3) \leftarrow PX^0) \leftrightarrow ((s^1\ \ (s^2, s^3)) \leftarrow PX^0)$$

$$A\,3.\ \ \sim (s^i \leftarrow PX^0) \leftrightarrow (s^i \leftarrow P \sim X^0)$$

$$\sim ((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow PX^0) \leftrightarrow ((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow P \sim X^0).$$

$$A\,4.\ \ s \downarrow P\,(s\,\alpha \leftarrow Q) \equiv s\,\alpha \downarrow Q.$$

Эти утверждения суть правила трансформации $X$. Следствия:

$$T\,1.\ \ (s^{i1} \leftarrow PX^0) \leftrightarrow (s^{i2} \leftarrow PX^0)$$

$$((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow PX^0) \leftrightarrow ((s^{k1},\ldots, s^{kl}) \leftarrow PX^0),$$

где $s^{i1}, s^{i2}\ldots, s^{im}, s^{ik}, \ldots, s^{kl}$ суть термины из множества $s^1,\ldots, s^n$.

Из $X$ образуются термины:

1) $PX^0$ — термины признаков;
2) $s^i \downarrow PX^0,\ (s^{i1},\ldots, s^{im}) \downarrow PX^0,\ s^* \downarrow PX\,(s^i/s^*)$,

$(s^{*1},\ldots, s^{*m}) \downarrow PX(s^{i1},\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots, s^{*m})$ — термины объектов;

3) $\downarrow(X)$, $\downarrow(X(s^i/s^*))$, $\downarrow(X(s^{i1},\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots, s^{*m}))$, $\downarrow(s^i \leftarrow PX^0)$, $\downarrow((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow PX^0)$ — термины объектов.

Если в $X$ не входит $E$, то имеют силу также утверждения:

$T\,3.\ (s^i \leftarrow E)\cdot((s^i \downarrow PX^0)\urcorner \leftarrow E) \rightarrow ((s^i \downarrow P \sim X^0) \leftarrow E).$
$(s^i \leftarrow E)\cdot((s^i \downarrow PX^0)? \leftarrow E) \rightarrow ((s^i \downarrow P \sim X^0) \leftarrow E)$
$T\,4. (s^i \urcorner \leftarrow E) \rightarrow ((s^i \downarrow PX^0)\urcorner \leftarrow E)$
$(s^i \urcorner \leftarrow E) \rightarrow ((s^i \downarrow P \sim X^0)\urcorner \leftarrow E)$
$T\,5. ((s^i \downarrow PX^0) \leftarrow E) \rightarrow ((s^k \downarrow PX^0) \leftarrow E).$

Аналогично для любых энок из $s^1,\ldots, s^n$.

$T\,6.\ ([s^i \leftarrow PX^0] \leftarrow v^1) \rightarrow (s^i \leftarrow E).$

Аналогично для любых энок из $s^1,\ldots, s^n$.

Сформулированные выше правила трансформации и способы образования терминов можно обобщить, рассматривая $X$ как любое высказывание. Например, высказывание $(s^1 \leftarrow P^1)\cdot(s^2 \leftarrow P^2)$ может быть представлено в форме $(s^1, s^2) \leftarrow P((s^{*1} \leftarrow P^1)\cdot(s^{*2} \leftarrow P^2))$ со всеми вытекающими отсюда последствиями.

## § 13. Определения

Возможны соглашения вида

$$(s^i \leftarrow P^i) \equiv X,\ (s^* \leftarrow P^i) \equiv X(s^i/s^*)$$
$$((s^{i1},\ldots, s^{im}) \leftarrow P^i) \equiv X,\ ((s^{*1},\ldots, s^{*m}) \leftarrow P^i) \equiv X(s^{i1},\ldots, s^{im}/s^{*1},\ldots, s^{*m}),$$

служащие определениями предикатов $P^i$.

## § 14. Структурно простые высказывания

В дальнейшем будем допускать, что $s$ может быть любой энкой $(s^1,\ldots, s^n)$, а $P$ — соответствующим энместным предикатом.

$D1$. Высказывания

$$s\alpha \leftarrow E \quad \text{и} \quad s\alpha \leftarrow P$$

суть структурно простые высказывания.

# ЭМПИРИЧЕСКИЕ И АБСТРАКТНЫЕ ОБЪЕКТЫ

## § 1. Эмпирические объекты

*D*1. Реальные эмпирические объекты суть объекты, которые отражаются исследователем посредством его природного (чувственного) аппарата отражения, воздействуют на этот аппарат (ощущаются, воспринимаются),— наблюдаются исследователем. Наблюдение может осуществляться с помощью приборов, усиливающих возможности чувственного отражения, может быть упорядоченной в пространстве и времени совокупностью из двух и более актов отражения такого рода. Вопрос о существовании таких объектов решается (в конце концов) в зависимости от возможности их наблюдения (данным исследователем или другими исследователями, свидетельствам которых он доверяет). Если на основе каких-то имеющихся данных исследователь судит о существовании какого-то объекта в прошлом или в местах, в которых он не может осуществлять наблюдение, то неявно принимается допущение: если бы исследователь смог перенестись в пространстве или во времени в соответствующее положение относительно этого объекта, то последний был бы доступен наблюдению.

Реальные эмпирические объекты не вечны (возникают и исчезают), изменчивы (теряют одни признаки и приобретают другие), существуют в определенной среде, в определенной области пространства и в определенное время, являются следствиями каких-то причин и сами порождают какие-то следствия, обладают бесконечным числом различных признаков и т. п. Высказывания о них, имеющие вид $s\alpha \leftarrow E$ и $s\alpha \leftarrow P$, их внешние отрицания и соединения знаками «и», «или» и т. п., могут иметь различные значения истинности в зависимости от времени и области пространства (одно и то же высказывание может быть истинным в одно время или в одном месте и неистинным в другое время или в другом месте).

*D*2. Гипотетические эмпирические объекты суть объекты, которые характеризуются следующими чертами. Сами по себе они не наблюдаются и в принципе не могут наблюдаться в силу соотношения свойств и средств наблюдателя и этих объектов. Наблюдаются последствия их воздействия на другие наблюдаемые объекты, которые и считаются их признаками. Существование этих объектов допускается для каких-то определенных целей. Эти объекты (как и реальные) принимаются как возникающие и исчезающие, как изменчивые и т. п. Основные принципы их допущения:

1) логическая непротиворечивость высказываний о них, отсутствие противоречий между этими высказываниями и признанными положениями данной науки;

2) достигается цель, ради которой они допускаются. Пример гипотетических эмпирических объектов — микрочастицы в физике.

Логическая противоречивость и непротиворечивость здесь понимается обычно: $X$ логически противоречиво, если найдется такое $Y$, что $X \vdash Y \cdot \sim Y$, и непротиворечиво, если такое $Y$ отсутствует (т. е. $\sim(X \vdash Y \cdot \sim Y)$, где $Y$ есть любое высказывание).

*D*3. Реальные эмпирические и гипотетические эмпирические объекты суть эмпирические объекты.

## § 2. Абстрактные объекты

Исследователь может принять решение в некотором акте познания не принимать во внимание некоторые признаки объектов (исключающе-негативная абстракция) или принимать во внимание только некоторые определенные признаки объектов (выделяюще-позитивная абстракция). Это решение может быть реализовано в отдельных случаях путем выбора предметной области, в которой исследуемые объекты действительно не обладают указанными признаками, или путем искусственного создания ее. И в этих случаях исследуемые объекты остаются эмпирическими, взятыми лишь в определенных условиях для наблюдения.

Иначе будет обстоять дело, если принимается решение отвлечься от таких признаков объектов, без которых эмпирические объекты вообще или объекты данной области исследования в частности не могут существовать. Аналогично при выделяющей абстракции, поскольку решение рассматривать только такие-то признаки означает решение не рассматривать прочие. Например, исследователь решает не принимать во внимание размеры и форму физических тел при рассмотрении их движения, считая, что эти тела не имеют пространственных размеров (суть «материальные точки»).

*D*1. Реализацией этого решения является допущение особых объектов, которые называются абстрактными (во всяком случае, мы их так будем называть). Эти объекты не существуют эмпирически по самому характеру их допущения. И исследование их уже не будет процессом наблюдения. Ниже мы уточним ряд понятий, относящихся к абстрактным объектам.

Абстрактные объекты вводятся в науку следующим образом. Исходные (или первичные) абстрактные объекты вводятся путем обычных определений с дополнениями относительно исключения признаков, о которых говорилось выше. Суть этих определений можно представить схемами.

Схема I: предмет $s$ будет термином объекта таким, что

$$s = Df.(s^* \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n \cdot \urcorner P_1 \cdot \ldots \cdot \urcorner P_m)) \ (n \geqslant 1,\ m \geqslant 1).$$

Здесь как-то перечислены признаки, какие присущи вводимому объекту (что не всегда делается явно) и какие не присущи (исключаются); причем, исключаемые признаки таковы, что эмпирические объекты (вообще или в данной области науки) без них не существуют, т. е. если $s_i$ есть эмпирический объект исследуемой области, то

$$(s^i \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n)) \leftarrow (P_1 \cdot \ldots \cdot P_m), \sim (s^i \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n) \urcorner \leftarrow \leftarrow (P_1 \vee \ldots \vee P_m)).$$

В другой форме определение по схеме I может принять вид определения самого объекта по принципу «$s$ есть такой объект, что ...». Определению можно также придать вид системы аксиом с первичным термином $s$:

$$s \leftarrow P^1, \ldots, s \leftarrow P^n, s \urcorner \leftarrow P_1, \ldots, s \urcorner \leftarrow P_m.$$

Схема II: предмет $s$ будет термином объекта таким, что

$$s = Df.\, s^* \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n),$$

где $n \geqslant 1$, и если из этого соглашения и других принятых в данной науке определений и утверждений логически не следует $s \leftarrow P^k$, то $s \urcorner \leftarrow P^k$; при этом $P^k$ есть необходимый признак эмпирических объектов, т. е.

$$(s^i \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n)) \leftarrow P^k, \sim (s^i \downarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n) \urcorner \leftarrow P^k).$$

Это определение можно также записать в виде системы аксиом

$$s \leftarrow P^1, \ldots, s \leftarrow P^n.$$

*D*2. Объекты, обозначаемые терминами, определенными по указанным схемам, называются исходными абстрактными объектами.

Обращаем внимание на то, что в определения терминов исходных абстрактных объектов не входят другие термины абстрактных объектов, кроме самих вновь вводимых терминов.

*D*3. Исходный абстрактный объект существует, если и только если соблюдены правила определения при введении его термина, и из определения его термина и других определений и утверждений данной науки не следует логическое противоречие при условии, что эти другие определения и утверждения непротиворечивы.

Из *D*2 и *D*3 следует:

*T*1. Исходный абстрактный объект либо существует, либо не существует, а неопределенность исключается, т. е.

$$(sa \leftarrow E) : (sa \urcorner \leftarrow E),$$

где *sa* есть исходный абстрактный объект.

Поскольку определения исходных абстрактных объектов в принципе стремятся сделать такими, чтобы выполнялось *D*3, то эти объекты всегда предполагаются существующими (точки, линии, числа и т. п. считаются данными).

*T*2. Высказывания об исходных абстрактных объектах универсальны.

*D*4. Производные абстрактные объекты суть объекты, термины которых определяются через термины исходных абстрактных объектов.

*T*3. Вопрос о существовании производных абстрактных объектов решается посредством рассуждений, т. е. посредством вывода соответствующих утверждений или их отрицаний из определений исходных абстрактных объектов или установления невозможности построить такие выводы. Здесь, таким образом, возможны по крайней мере три исхода: доказательство существования, доказательство несуществования и установление неразрешимости проблемы существования.

*T*4. Признаки производных абстрактных объектов выясняются также посредством рассуждений. И здесь возможны три исхода.

*D*5. Исходные и производные абстрактные объекты суть абстрактные объекты.

*A*1. Если $s^1 \rightharpoondown s^2$ и $s^1$ ($s^2$) есть эмпирический (абстрактный) объект, то $s^2$ ($s^1$) есть эмпирический (абстрактный) объект.

## § 8. Интерпретация

*D*1. Интерпретация абстрактного объекта $s^1$ заключается в следующем:

1) абстрактному объекту $s^1$ ставится в соответствие объект $s^2$ (в частности — эмпирический), т. е. устанавливается

$$s^2 \Leftarrow s^1;$$

2) $s^2$ подбирается с таким расчетом, чтобы для любого $X$ выполнялось утверждение

$$(s^1 \leftarrow PX) \rightarrow (s^2 \leftarrow PX\,(s^1/s^2)).$$

*D*2. Абстрактный объект, имеющий интерпретацию, называется реальным абстрактным объектом, а не имеющий таковой — гипотетическим. Цель введения последних — интересы дедукции.

Обращаем внимание на то, что интерпретация термина абстрактного объекта и выбор термина из области значения некоторого термина — разные операции. Их, однако, часто смешивают, поскольку в обоих случаях имеет место умозаключение от $s^1$ к $s^2$. Во втором случае оно идет по такой схеме: «Если для всех $s^1$ имеет силу $s^1 \leftarrow PX$ и $s^1 \rightharpoondown s^2$, то $s^2 \leftarrow PX\,(s^1/s^2)$». Достаточно сравнить ее с приведенной выше схемой, чтобы увидеть различие.

## § 4. Исчисление

Совокупность определений и утверждений, содержащих термины абстрактных объектов, образует исчисление. В настоящее время с понятием «исчисление» ассоциируют также введение специальной символики, установление точного перечня правил вывода и т. д. Но это уже касается технического совершенства исчислений.

Поскольку термины абстрактных объектов не имеют эмпирических двойников, то сами эти термины начинают рассматривать как исследуемые объекты. И в этом есть резон, ибо все определения и утверждения касаются смысла этих терминов. При таком понимании исчисления принимают характер формальных систем, в которых фигурируют сами рассматриваемые объекты, а правила рассуждения выступают как операции с этими объектами. Этот шаг терминологически упрощает изложение, но вместе с тем он делает еще менее заметной связь с эмпирической основой.

## § 5. Эмпирические и точные науки

Абстрактные объекты изобретаются как средство для исследования эмпирических объектов (для получения знаний об эмпирических объектах). Однако в силу разделения труда в науке изобретение и исследование их обособляется от исследования эмпирических объектов в форме развития особых наук, часто называемых точными или дедуктивными. Интересы и потребности точных наук служили основным стимулом развития логики и в подавляющей степени определили ее содержание.

Существует огромная литература, посвященная так называемым «проблемам логики и методологии дедуктивных (или точных) наук». Содержание этой литературы общеизвестно: теория дедукции (логического следования, вывода), теория доказательства, аксиоматический метод и другие связанные с ними вопросы логики. Мы на них здесь останавливаться не будем.

Заметим, что нельзя проблематику логики абсолютно строго разделить на проблемы, относящиеся к опытным наукам, и проблемы, относящиеся к точным наукам. Однако опытное исследование (исследование эмпирических объектов) имеет ряд особенностей (сравнительно с абстрактными объектами), которые фиксируются в определенной системе понятий и утверждений логики.

## § 6. Состояния

*D*1. Предметы, обозначаемые терминами

$$\downarrow(s\alpha \leftarrow E) \quad \text{и} \quad \downarrow(s\alpha \leftarrow P),$$

будем называть состояниями объекта S. Высказывания

$$s\alpha \leftarrow E \quad \text{и} \quad s\alpha \leftarrow P$$

суть описания состояния S.

*D*2. Два состояния тождественны в таких и только таких случаях:

1) состояния $\downarrow(s^1\alpha \leftarrow P^1)$ и $\downarrow(s^2\beta \leftarrow P^2)$ тождественны, если и только если попарно тождественны $S^1$ и $S^2$, $\alpha$ и $\beta$, $P^1$ и $P^2$;

2) состояния $\downarrow(s^1\alpha \leftarrow E)$ и $\downarrow(s^2\beta \leftarrow E)$ тождественны, если и только если попарно тождественны $S^1$ и $S^2$, $\alpha$ и $\beta$.

Если $X$, $Y$, $X^1$, $X^2$,... суть структурно простые высказывания, то символы

$$|x|, \quad |y|, \quad |x^1|, \quad |x^2|, \ldots$$

суть термины, фиксирующие описания состояния объектов, о которых в них говорится.

*D*3. Два состояния $|x|$ и $|y|$ несовместимы, если и только если

$$\sim(X \cdot Y).$$

*T*1. Состояния $\downarrow(s \leftarrow P)$, $\downarrow(s \urcorner \leftarrow P)$, $\downarrow(s? \leftarrow P)$, $\downarrow(s \urcorner \downarrow E)$ и $\downarrow(s? \leftarrow E)$ попарно несовместимы.

*T*2. Состояния $\downarrow(s \leftarrow E)$, $\downarrow(s \urcorner \leftarrow E)$ и $\downarrow(s? \leftarrow E)$ попарно несовместимы.

Существование состояний определяется утверждениями:

$$A1. \quad (\downarrow(s\alpha \leftarrow P) \leftarrow E) \equiv ((s\alpha \downarrow P) \leftarrow E)$$

$$(\downarrow(s\alpha \leftarrow E) \leftarrow E) \equiv (s\alpha \leftarrow E)$$

$$A2. \quad (\downarrow(s\alpha \leftarrow P) \urcorner \leftarrow E) \equiv (\downarrow(s\beta \leftarrow P) \leftarrow E) : (\downarrow(s\gamma \leftarrow P) \leftarrow E)$$

$$(\downarrow(s\alpha \leftarrow E) \urcorner \leftarrow E) \equiv (\downarrow(s\beta \leftarrow E) \leftarrow E) : (\downarrow(s\gamma \leftarrow E) \leftarrow E),$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ различаются как $\urcorner$, ? и отсутствие их.

Неопределенность для состояний исключена, т. е.

$$A3. \quad \sim(|x| \leftarrow E) \equiv (|x| \urcorner \leftarrow E).$$

## § 7. Ситуация

$D1$. Непустое множество совместимых состояний различных (в случае двух и более) объектов будем называть ситуацией.

$D2$. Две ситуации различны, если и только если не совпадают множества их состояний.

$D3$. Две ситуации несовместимы, если и только если одна из них содержит по крайней мере одно состояние, несовместимое по крайней мере с одним состоянием другой.

$D4$. Ситуация существует, если и только если существует каждое ее состояние.

$D5$. Если $X^1, \ldots, X^n$ $(n \geqslant 1)$ суть описания состояний данной ситуации, то

$$X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$$

есть описание ситуации.

## § 8. Набор ситуаций

$D1$. Непустое упорядоченное множество различных (в случае двух и более) ситуаций будем называть набором ситуаций или просто набором.

В $D1$ фигурирует термин «упорядоченное». Подробнее мы его рассмотрим ниже. Здесь же достаточно сказать, что под упорядоченностью можно иметь в виду последовательность ситуаций во времени или расположение в различных областях пространства. Частный случай такой упорядоченности — безразличие к тому или иному порядку.

$D2$. Два набора различны, если и только если различна упорядоченность их ситуаций или не совпадают множества их ситуаций.

$D3$. Набор существует, если и только если существует каждая его ситуация в соответствующем месте порядка.

$D4$. Описание набора складывается из описаний его ситуаций и дополнительных терминов или высказываний, фиксирующих порядок ситуаций.

$D5$. Описание набора истинно, если и только если истинны все описания его ситуаций в соответствующем порядке. Прочие значения истинности для описаний наборов вводятся по принципу:

$$([Z^1] \leftarrow v^i) \equiv ([Z^2] \leftarrow v^1),$$

где $v^i$ есть определяемое значение истинности, а $Z^2$ — соответственно подобранное описание набора, отличного (если $v^i$ не есть $v^1$) от $Z^1$.

## § 9. Производные высказывания

Описания наборов (и ситуаций) образуют основания для построения тех форм знаний, которые не получаются путем вывода из других знаний. Все познавательные действия, не являющиеся выводами, можно теперь представить как операции с описаниями наборов.

При этом надо различать: 1) объяснение происхождения тех или иных структур высказываний из описаний наборов; 2) отыскание для данного высказывания некоторого описания набора, адекватного ему. В первом случае всякая структура теоретически сводится к описанию набора, поскольку допускаются идеализированные условия. Во втором же случае речь идет о практической осуществимости такого сведения и о его целесообразности. При этом дело обстоит так, что часто высказывание сводится к описанию набора лишь совместно с другими высказываниями, сводится в несколько шагов, сводится в разных «плоскостях», сводится к серии описаний наборов и т. д. Практически это не всегда возможно и целесообразно. В какой мере это важно и возможно, должен установить логический анализ каждой данной конкретной науки.

Высказывания, получаемые из описаний наборов, можно классифицировать по типам описаний наборов и по типам операций, посредством которых из них строятся новые высказывания. Известны разнообразные типы наборов: 1) из одной ситуации и из двух или более ситуаций; 2) в каждой ситуации только одно состояние или два и более различных состояния; 3) объекты в ситуации тождественны, а признаки их различны; объекты различны, а признаки тождественны и т. п. Разнообразны соответственно и описания наборов. Разнообразны и типы операций перехода от описаний наборов к высказываниям. В одних случаях операции таковы, что по содержащимся в высказываниях терминам или логическим знакам можно восстановить описания наборов, из которых они получаются, в других же случаях можно восстановить лишь логический тип набора (так что для получения описания набора надо заново произвести некоторое наблюдение). В результате комбинирования указанных признаков получаются высказывания, которые невозможно охватить в классификации, осуществляемой лишь по одному признаку.

Так что должны быть найдены какие-то иные принципы, по отношению к которым классификация станет лишь побочным делом.

В высказываниях, получаемых из описаний наборов, содержатся термины или логические знаки, по которым можно реконструировать сами эти описания или установить их логический тип. Если при этом происходит переработка терминов в новые термины, то в высказывания так или иначе включаются знаки, указывающие на соответствующие операции.

Построение высказываний из описаний наборов есть замена последних. При этом замена строится с таким расчетом, чтобы выполнялся принцип:

$$([X] \leftarrow v^1) \rightarrow ([Y] \leftarrow v^1),$$

где $Y$ есть высказывание, заменяющее описание набора $X$. Проверка высказывания $Y$ осуществляется так: в зависимости от характера $Y$ либо восстанавливается $X$ и производится его проверка, либо выясняется, какого рода описание набора должно быть получено. Во втором случае предпринимаются дополнительные исследования, в итоге которых получается некоторое описание набора $X^*$. В силу имеющихся соглашений из $X^*$ получается $Y^*$, и из сравнения $Y$ и $Y^*$ устанавливается значение истинности первого.

Пусть, например, имеется $a = f(b)$; по типу $f$ мы можем судить о том, что имело место какое-то описание набора типа $(((a = \ldots), (b = \ldots)), \ldots, ((a = \ldots), (b = \ldots))$; для проверки высказывания надо заполнить пустые места, т. е. произвести соответствующие наблюдения и измерения, и затем использовать правила, позволяющие заменить это множество высказываний высказыванием типа $a = f(b)$, т. е. подобрать математический тип зависимости; если при этом получится $a = f(b)$ или $a =$

$= f^* (b)$ такое, что практически для нас не имеет значения различие $f$ и $f^*$, то $a = f^* (b)$ считается истинным, если нет — неистинным. Когда говорят, что $a = f (b)$ оправдывается на практике, то фактически это самое делают: один случай — по данной величине $b$ находят величину $a$ на основе $a = f (b)$ и видят, что результат совпадает с наблюдаемым; и так много раз; но при этом каждый раз фиксируют наблюдаемые величины $a$ и $b$, т. е. неявно восстанавливают описание набора.

Из описаний наборов получаются высказывания такие, что в последних появляются термины или логические знаки, отсутствовавшие в первых. В дальнейшем по мере изложения нам с такими случаями придется иметь дело неоднократно.

## § 10. Изменение

*D*1. Состояния

$$\downarrow (s \leftarrow E),\ \downarrow (s \urcorner \leftarrow E),\ \downarrow (s \leftarrow P),\ \downarrow (s \urcorner \leftarrow P)$$

суть статические состояния, а

$$\downarrow (s? \leftarrow E),\ \downarrow (s? \leftarrow P)$$

— переходные.

Статические состояния будем изображать символами вида

$$| x |,\quad | y |,\quad | x^1 |, \ldots,\quad | \urcorner x |,\quad | \urcorner y |,\quad | \urcorner x^1 |, \ldots,$$

а переходные —

$$| ?x |, | ?y |,\ | ?x^1 |, \ldots .$$

Соотношение этих символов таково: если одно (безразлично, какое) из $|x|$ и $|\urcorner x|$ есть $\downarrow (s \leftarrow E)$, то другое из них есть $\downarrow (s \urcorner \leftarrow E)$; $|?x|$ при этом есть $\downarrow (s? \leftarrow E)$; аналогично для $\downarrow (s\alpha \leftarrow P)$.

*A*1. $| \urcorner \urcorner x | \equiv | x |$.

Эмпирически данным является тот факт, что состояния $|x|$, $|\urcorner x|$ и $|?x|$ исследователь не может наблюдать сразу (одновременно), может наблюдать их лишь по отдельности.

*D*2. Произошло (осуществилось) элементарное изменение, касающееся $s$,— значит наблюдалась ситуация, в которой имело место состояние $|x|$ ($s$ входит в $X$) и затем наблюдалась ситуация, в которой имело место $|\neg x|$. Обозначим это символом

$$|x| \Rightarrow |\neg x|.$$

Частное отрицание его означает: наблюдалась ситуация с $|x|$, затем — ситуация опять-таки с $|x|$. Обозначим его символом

$$|x| \Rightarrow |x|.$$

$A2.\ (|x|\neg \Rightarrow |\neg x|) \equiv (|x| \Rightarrow |x|)$

$A3.\ \sim(|x| \Rightarrow |\neg x|) \equiv (|x|\neg \Rightarrow |\neg x|).$

*D*3. Элементарное изменение есть последовательность состояний $|x,|$ $|?x|$ и $|\neg x|$. Символически

$$|x,\ ?x, \neg x|.$$

*D*4. Два элементарных изменения $|x, ?\ x,\ \neg x|$ и $|y, ?\ y,\ \neg y|$ различны, если и только если различны состояния $x|$ и $|y|$.

*D*5. Изменение есть непустое упорядоченное множество элементарных изменений. Все, что касается элементарных изменений, распространяется на изменения вообще путем простых обобщений символики.

Исследование изменения идет по таким линиям:

1) фиксируется то, что изменение произошло;

2) фиксируется то, что имеет место переходное состояние от одного (такого-то) статического состояния к другому;

3) осуществляется анализ изменения, в результате которого выясняются составляющие его изменения;

4) переходное состояние в свою очередь исследуется как изменение.

*D*6. Изменение $|x,\ ?x, \neg x|$ рассматривается как дискретное, если не принимается во внимание $|?x|$. Крайний случай — допускается, что никакого $|?x|$ не бывает (и тогда мы имеем дело с абстрактным объектом).

*D*7. Изменение $|x,\ ?x, \neg x|$ рассматривается как недискретное, если принимается во внимание $|?x|$, и последнее в свою очередь рассматривается как совокупность недискретных изменений. Теоретически такой процесс рассмотрения переходного состояния как совокупности изменений бесконечен. Практически же он заканчивается, так что всегда некоторые изменения принимаются за элементарные, и далее их состояния не анализируются.

## § 11. Варьирование признаков

*D*1. Признаки $P^1, \ldots, P^n (n \geqslant 2)$ суть варианты признака P, если и только если

$$P \rightharpoonup P^1, \ldots, \ P \rightharpoonup P^n,$$

и для любого S

$$\sim ((s \leftarrow P^i) \cdot (s \leftarrow P^k)),$$

где $P^i$ и $P^k$ есть любая пара из $P^1, \ldots, P^n$. Например, признаки «движется со скоростью $a^1$» и «движется со скоростью $a^2$», суть варианты признака «движется», если $a^1 \neq a^2$.

*D*2. Множество признаков, уловлетворяющих *D*1, образует область варьирования данного признака. Один и тот же признак может иметь две и более различные области варьирования. Так, вариантами признака «двигаться» являются признаки «двигаться влево» и «двигаться вправо», относящиеся к другой области варьирования, чем признаки «двигаться со скоростью $a^1$» и «двигаться со скоростью $a^2$».

*T*1. Если $P^2$ есть вариант $P^1$ и $s \leftarrow P^2$ (или $s \urcorner \leftarrow P^1$; или $s? \leftarrow P^1$), то (согласно *D*1 и *T*4V6) $s \leftarrow P^1$ (соответственно $s \urcorner \leftarrow P^2$; $s? \leftarrow P^2$).

*T*2. Согласно *D*2V9 высказывание $s \leftarrow P$ истинно в отношении любого $S \downarrow P^i$, где $P^i$ есть вариант P.

Возможно и обратное тому, что говорится в $T_2$: два и более различных высказывания $s \leftarrow P^k$ могут считаться истинными в отношении одного и того же $S \downarrow P^i$.

Термины вариантов P образуются так:

1) имеются такие предметы $\delta^1, \delta^2, \ldots$, присоединение которых к *P* дает термины

$$P\,\delta^i,$$

обозначающие варианты P;

2) если по соглашению

$$s^* \leftarrow P^2 \equiv s^* \leftarrow P^1\,\delta^i,$$

то термин $P^2$ есть термин варианта P.

*Т3*. Если $P^1$ есть вариант $P^2$, то для любого S

$$(s \leftarrow P^1) \rightarrow (s \leftarrow P^2)$$

$$(s \urcorner \leftarrow P^2) \rightarrow (s \urcorner \leftarrow P^1).$$

Образование термина $P\delta^i$ не есть образование сложного термина по правилам логики. Он является простым (в нашем понимании) термином. Предметы $\delta^i$ рассматриваются как самостоятельные знаки лишь постольку, поскольку неявно предполагается, что они суть части $P\delta^i$.

## § 12. Величина

Частный случай терминов типа $P\delta^i$ образуют термины, в которых $\delta^i$ есть знак величины. К знакам величины относятся такие архаические выражения, как «много», «сильно», «медленно» и т. п. В науке знаки величин суть числа с названиями единиц измерения и знаками способов получения чисел, т. е. имеют сложную структуру. Так что соответствующие термины расчленяются на три части и имеют вид

$$P\alpha\beta,$$

где $P$ — название признака, $\alpha$ — число, $\beta$ — название величины. Последнее, в свою очередь, может быть составным.

Величины разделяются на простые (например, «5 кг») и производные (например, «10 кг/м»). Измерение может быть прямым и косвенным. При прямом измерении сразу получается $s \leftarrow P\alpha\beta$. При косвенном получается $s^2 \leftarrow P^2\alpha\beta$, и на том основании, что

$$(s^1 \leftarrow P^1) \rightarrow (s^2 \leftarrow P^2\alpha\beta),$$

принимается $s^1 \leftarrow P^1_{\alpha\beta}$.

Измерения можно разбить на две групы также по следующему признаку. В одних случаях имеются вполне определенные единицы (эталоны) измерения и известны стандартные процедуры измерения. В других же случаях нет определенных единиц измерения (просто допускаются какие-то отвлеченные единицы) и нет стандартных процедур измерения (просто допускается, что имеются какие-то процедуры). При этом признакам приписывается какое-то число единиц. Какими соображениями при этом руководствуются, зависит от конкретных особенностей той или иной задачи и условий ее разрешения. Объективные критерии здесь дает лишь опыт (приписывание таких-то величин таким-то признакам давало такой-то результат).

Обычно под измерением имеют в виду измерение первого вида. Что касается измерения второго вида, то его (в отличие от первого, от измерения в строгом смысле слова) можно назвать «взвешиванием признаков» (в смысле отыскания числового «веса» признаков).

Встречаются случаи, когда все $\delta^1, \ldots, \delta^n$ различны, а все $s \leftarrow P\delta^1, \ldots, s \leftarrow P\delta^n$ считаются истинными. Различия таких высказываний, если они важны, фиксируются знаками степеней точности и приближения.

## § 13. Диапазон истинности

*D*1. Множество всевозможных $s \leftarrow P^i$ $(i \geqslant 1)$, которые считаются истинными в отношении одного и того же объекта $S \downarrow P$, образует диапазон истинности высказываний об этом объекте.

В этом случае признак P выступает как вариант двух или более различных признаков $P^1, P^2, \ldots$ . Например, высказывания «частица $a$ движется со скоростью $b^1$» и «Частица $a$ движется со скоростью $b^2$» могут оба считаться истинными в отношении к наблюдаемой движущейся частице $a$, хотя $b^1 \neq b^2$. Чаще всего диапазон истинности задается отношением величин (например, заданы такие величины $a$ и $b$, что если $a \leqslant \delta^i \leqslant b$, то $s \leftarrow P\delta^i$ считается истинным).

Диапазон истинности устанавливается в каждой области науки применительно к ее возможностям и потребностям. Никаких логических критериев на этот счет нет, если не считать банальных пожеланий по возможности сузить этот диапазон и не включать в него любые возможные высказывания. И только благодаря тому, что логический педантизм здесь уступает место практической целесообразности, во многих случаях становится возможным использование высказываний и из допущений того, чего нет и не может быть на самом деле, получать высказывания, истинные в принятом диапазоне.

# ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

## § 1. Логика высказываний

Раздел логики, исследующий свойства высказываний со знаками «и», «или», «не» и другими производными от них логическими знаками, называют логикой высказываний. Точнее говоря, в логике высказываний рассматриваются только такие высказывания, которые имеют структуру.

$$\sim X,\ X\cdot Y,\ X:Y,\ X\dot{\vee}Y,\ X\supset Y$$

и т. п., где $X$, $Y$, ... суть любые высказывания.

Те высказывания, которые имеют иную структуру (т. е. не расчленяются на высказывания и логические знаки $\sim$ ,$\cdot$,:, $\vee$, $\supset$, ...), принимаются здесь за элементарные. Будем их изображать символами

$$p,\ q,\ r,\ p^1,\ p^2,\dots,\ q^1,\ q^2,\dots .$$

Их свойства исследуются в других разделах логики.

$D1$. Мы примем следующее определение высказывания:

1) элементарное высказывание есть высказывание;

2) если $X$ есть высказывание, то $\sim X$ есть высказывание;

3) если $X^1$, $X^2$, ..., $X^n$ суть высказывания, то $X^1\cdot X^2$, $X^1\cdot X^2\cdot\ \dots\ \cdot X^n$, $X^1 : X^2$, $X^1 : X^2 :\ \dots\ : X^n$ суть высказывания;

4) если $Y$ есть высказывание и по соглашению $X \equiv Y$, то $X$ есть высказывание;

5) нечто есть высказывание только в силу пунктов 1—4.

До сих пор мы употребляли логические знаки $\sim$, $\cdot$, :, $\vee$ как привычно ясные. Задача заключается теперь в том, чтобы осуществить их экспликацию, т. е. дать точное описание свойств высказываний с этими знаками.

## § 2. Смысл высказываний

С точки зрения смысла высказываний задача экспликации рассматриваемых логических знаков сводится к следующей задаче: указать способы сведения всех возможных структур высказываний с этими знаками к некоторым основным или каноническим структурам (формам), смысл которых считается ясным из других источников. Мы здесь принимаем в качестве основных форм следующие ($D_1$):

1) элементарные высказывания, т. е.

$$p,\ q,\ r,\ p^1,\ p^2,\ \ldots;$$

2) их внешние отрицания, т. е.

$$\sim p,\ \sim q,\ \sim r,\ \sim p^1,\ \sim p^2, \ldots;$$

3) высказывания вида

$$X \cdot Y,\ X : Y,\ X^1 \cdot X^2 \cdot \ \ldots \cdot X^n,\ X^1 : X^2 : \ \ldots : X^n,$$

где $X$, $Y$, $X^1$, ..., $X^n$ суть элементарные высказывания или их общие отрицания.

Смысл прочих структур определяется через основные посредством следующих утверждений:

$A1.\ \sim\sim X \equiv X$

$A2.\ \sim(X \cdot Y) \equiv (X \cdot \sim Y) : (\sim X \cdot Y) : (\sim X \cdot \sim Y)$

$\sim(Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n) \equiv X^1 : \ldots : X^k,$

где $X^1$, ..., $X^k$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $(Y^1 \cdot \ \ldots \ \cdot Y^n)$ только наличием $\sim$ по крайней мере перед одним из $Y^1$, ..., $Y^n$.

$A3.\ \sim(X : Y) \equiv (X \cdot Y) : (\sim X \cdot \sim Y)$

$\sim(X^1 : \ldots : X^n) \equiv (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) : Y^1 : \ldots : Y^l,$

где $Y^1$, ..., $Y^l$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $(X^1 \cdot \ \ldots \ \cdot X^n)$ только наличием $\sim$ перед всеми $X^1$, ..., $X^n$ или перед $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из них.

$A4.\ (X : Y) \cdot Z \equiv (X \cdot Z) : (Y \cdot Z)$

$(X^1 : \ldots : X^n) \cdot (Y^1 : \ldots : Y^m) \equiv (X^1 \cdot Y^1) : \ldots :$
$: (X^1 \cdot Y^m) : \ldots : (X^n \cdot Y^1) : \ldots : (X^n \cdot Y^m)$

$A5.\ X \cdot (Y \cdot Z) \equiv (X \cdot Y \cdot Z)$

$X \cdot (Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n) \equiv (X \cdot Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n)$

$$A6.\ X:(Y:Z)\equiv(X\cdot Y\cdot Z):(X\cdot\sim Y\cdot\sim Z):$$
$$:(\sim X\cdot Y\cdot\sim Z):(\sim X\cdot\sim Y\cdot Z)$$
$$Z:\left(X^1:\ldots:X^n\right)\equiv\left(Z\cdot X^1\cdot\ldots\cdot X^n\right):(Z\cdot Y^1):$$
$$\ldots:\left(Z\cdot Y^l\right):(\sim Z\cdot Y_1):\ldots:(\sim Z\cdot Y_s)$$

где $Y^1, \ldots, Y^l$ те же, что в $A3$, а $Y_1, \ldots, Y_s$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $\left(X^1\cdot\ldots\cdot X^n\right)$ только наличием $\sim$ перед всеми $X^1, \ldots, X^n$, кроме одного;

$$(X_1:\ldots:X_m):\left(X^1:\ldots:X^n\right)\equiv\left(Z^1\cdot X^1\cdot\ldots\cdot X^n\right):$$
$$:(Z^1\cdot Y^1):\ldots:\left(Z^1\cdot Y^l\right):\ldots:\left(Z^r\cdot X^1\cdot\ldots\cdot X^n\right):$$
$$:\left(Z^r\cdot Y^1\right):\ldots:\left(Z^r\cdot Y^l\right):(X_1\cdot\ldots\cdot X_m\cdot Y_1):\ldots:$$
$$:(X_1\cdot\ldots\cdot X_m\cdot Y_s):(V^1\cdot Y_1):\ldots:(V^1\cdot Y_s):\ldots:$$
$$:\left(V^t\cdot Y_1\right):\ldots:\left(V^t\cdot Y_s\right),$$

где $Z^1, \ldots, Z^r$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $(X_1\cdot\ldots\cdot X_m)$ только наличием $\sim$ перед всеми $X_1, \ldots, X_m$, кроме одного; $Y^1, \ldots, Y^l$, $Y_1, \ldots, Y_s$ те же, что выше, $V^1, \ldots, V^t$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $(X_1\cdot\ldots\cdot X_m)$ только наличием $\sim$ перед всеми $X_1, \ldots, X_m$ или перед $i$ $(1\leqslant i\leqslant m-2)$ из них.

$$A7.\ (X\vee Y)\equiv\sim(\sim X\cdot\sim Y)$$
$$\left(X^1\vee X^2\vee\ldots\vee X^n\right)\equiv\sim\left(\sim X^1\cdot\sim X^2\cdot\ldots\cdot\sim X^n\right)$$
$$A8.\ (X\mid Y)\equiv\sim(X\cdot Y)$$
$$\left(X^1\mid X^2\mid\ldots\mid X^n\right)\equiv\sim\left(X^1\cdot X^2\cdot\ldots\cdot X^n\right)$$
$$A9.\ (X\supset Y)\equiv\sim(X\cdot\sim Y)$$
$$A10.\ (X\supset\subset Y)\equiv(X\supset Y)\cdot(Y\supset X).$$

Теперь, используя утверждение $A2IV7$ «Если $X\equiv Y$, то $Z\equiv Z(X/Y)$», для любого высказывания $W$, построенного из элементарных высказываний и знаков $\sim$, $\cdot$, $:$, $\vee$, $|$, $\supset$ и $\supset\subset$ (можно вводить и другие производные знаки), можно отыскать такое высказывание $V$ в основной форме, что

$$W\equiv V.$$

Будем в таком случае говорить ($D2$), что $W$ представимо в основной форме $V$ (или сводимо к ней).

## § 3. Значения истинности

Для элементарных высказываний значения истинности предполагаются известными. Для прочих структур они устанавливаются в соответствии с определениями, которые мы сейчас сформулируем.

Приведем сначала двузначные определения. Основные значения — $v^1$ и $nv^1$. Последнее определяется утверждением

$$([X] \leftarrow nv^1) \equiv ([X] \urcorner \leftarrow v^1).$$

Комплект этих значений полон, т. е.

$$([X] \leftarrow v^1) : ([X] \leftarrow nv^1).$$

В общем случае $nv^1$ не совпадает с $v^4$.

Для рассматриваемых структур значения истинности определяются утверждениями:

$A1$. $([\sim X] \leftarrow v^1) \equiv ([X] \leftarrow nv^1)$

$A2$. $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^1) \equiv ([X^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v^1)$

$A3$. $([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^1) \equiv ([X^1 \cdot \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n] \leftarrow v^1) :$
$: ([X^2 \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n] \leftarrow v^1) : \ldots :$
$([X^n \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1}] \leftarrow v^1)$.

Из этих утверждений согласно $A3IV9$, $A1V10$, $A1VI2$ — $A10VI2$ и $A1IV7$ — $A3IV7$ получим утверждения, определяющие значения истинности для прочих структур.

$T1$. $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow nv^1) \equiv ([Y^1] \leftarrow v^1) : \ldots : ([Y^k] \leftarrow v^1)$,

где $Y^1, \ldots, Y^k$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ только наличием $\sim$ по крайней мере перед одним из $X^1, \ldots, X^n$.

$T2$. $([X : Y] \leftarrow nv^1) \equiv ([X \cdot Y] \leftarrow v^1) : ([\sim X \cdot \sim Y] \leftarrow$
$\leftarrow v^1)$

$([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow nv^1) \equiv ([Y^1] \leftarrow v^1) : \ldots : ([Y^l] \leftarrow v^1)$,

где $Y^1, \ldots, Y^l$ суть высказывания, в число которых входит $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него наличием $\sim$ (одного и только одного), перед всеми или перед $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из $X^1, \ldots, X^n$.

$T3$. $([\sim X] \leftarrow nv^1) \equiv ([X] \leftarrow v^1)$.

Обращаем внимание на то, что знаки $\sim$, $\cdot$ и $:$ здесь не вводятся утверждениями $A1$ — А3. Смысл их известен до этих утверждений. Последние суть определения выражений

$$[\sim X] \leftarrow v^1, \ [X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^1, \ [X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^1.$$

При этом смысл выражений

$$[X] \leftarrow v^1$$

предполагается известным: он сводится в конечном итоге к смыслу выражений

$$[p] \leftarrow v^1 \qquad \text{и} \qquad [\sim p] \leftarrow nv^1$$

А вопрос о том, как устанавливается значение истинности элементарных высказываний, предполагается решенным.

Построим теперь определения значений истинности для рассматриваемых структур высказываний с учетом того, что возможны четыре основные значения истинности $v^1$, $v^2$, $v^3$ и $v^4$. Теперь, разумеется, $nv^1$ уже не будет основным значением.

$A4.$ $([\sim X] \leftarrow v^4) \equiv ([X] \leftarrow v^1)$

$A5.$ $([\sim X] \leftarrow v^1) \equiv ([X] \leftarrow v^2) : ([X] \leftarrow v^3) : ([X] \leftarrow v^4).$

Таким образом, не всегда $X$ будет равнозначно $\sim \sim X$, т. е.

$T1.$ $\sim (X \approx \sim \sim X).$

Но зато

$T2.$ $\sim X \approx \sim \sim \sim X$

Будут также верны утверждения:

$T3.$ $([X] \leftarrow v^1) \rightarrow ([\sim \sim X] \leftarrow v^1)$

$([\sim \sim X] \leftarrow v^1) \rightarrow ([X] \leftarrow v^1)$

$([X] \leftarrow nv^1) \rightarrow ([\sim \sim X] \leftarrow nv^1)$

$([\sim \sim X] \leftarrow nv^1) \rightarrow ([X] \leftarrow nv^1)$

$A6.$ $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^1) \equiv ([X^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v^1).$

$A7.$ $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^2) \equiv Y_1^1 : \ldots : Y_1^k,$

где $Y_1^1, \ldots, Y_1^k$ есть перечень всевозможных различных случаев, когда по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ имеет значение $v^2$, а все остальные имеют значения $v^1$; точнее говоря, $Y_1^1, \ldots, Y_1^k$ суть всевозможные высказывания

$([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где по крайней мере одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^2$, а остальные — $v^1$. Утверждение $A7$ можно записывать в форме

$$([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^2) \equiv (([X^1] \leftarrow v^2) \vee \ldots \vee ([X^n] \leftarrow v^2)) \cdot$$
$$\cdot ([X^1] \leftarrow nv^3\, nv^4) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow nv^3\, nv^4).$$

$A8.$ $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^3) \equiv Y_2^1 : \ldots : Y_2^l$,

где $Y_2^1, \ldots, Y_2^l$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где по крайней мере одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^3$, а все остальные суть $v^1$ или $v^2$ (во всевозможных комбинациях). Утверждение $A_2$ можно записать в форме

$$([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^3) \equiv (([X^1] \leftarrow v^3) \vee \ldots \vee ([X^n] \leftarrow v^3)) \cdot$$
$$\cdot ([X^1] \leftarrow nv^4) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow nv^4)$$

$A9.$ $([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^4) \equiv Y_3^1 : \ldots : Y_3^m$,

где $Y_3^1, \ldots, Y_3^m$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где по крайней мере одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^4$, а все остальные суть $v^1$, $v^2$ или $v^3$ (во всевозможных сочетаниях), т. е.

$$([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^4) \equiv ([X^1] \leftarrow v^4) \vee \ldots \vee ([X^n] \leftarrow v^4).$$

$A10.$ $([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^1) \equiv Z_1^1 : \ldots : Z_1^k$,

где $Z_1^1, \ldots, Z_1^k$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где одно и только одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^1$, а все остальные суть $v^2$, $v^3$ или $v^4$ (во всевозможных комбинациях).

$A11.$ $([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^2) \equiv Z_2^1 : \ldots : Z_2^l$,

где $Z_2^1, \ldots, Z_2^l$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где по крайней мере одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^2$, а остальные суть $v^4$.

$A12.$ $([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^3) \equiv Z_3^1 : \ldots : Z_3^m$,

где $Z_3^1, \ldots, Z_3^m$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где по крайней мере одно из $v_1, \ldots, v_n$ есть $v^3$, а остальные суть $v^2$ или $v^4$ (во всевозможных комбинациях).

$$A13.\ ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^4) \equiv Z_4^1 : \ldots : Z_4^r,$$

где $Z_4^1, \ldots, Z_4^r$ суть всевозможные высказывания вида $([X^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_n)$, где все $v_1, \ldots, v_n$ суть $v^4$ или по крайней мере два из $v_1, \ldots, v_n$ суть $v^1$, а остальные суть $v^2$, $v^3$ или $v^4$ (во всевозможных комбинациях).

## § 4. Локальные и универсальные высказывания

Возьмем высказывание $X : Y$. Если $X$ и $Y$ суть локальные высказывания, то для того чтобы убедиться в истинности $X : Y$, необходимо следующее:

1) убедиться в том, что возможно $([X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1)$, или $([\sim X \cdot Y] \leftarrow v^1)$, или и то и другое;

2) убедиться в том, что невозможно $([X \cdot Y] \leftarrow v^1)$ и $([\sim X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1)$.

Таким образом, если нам известно, что $([X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1)$, то мы еще не можем только на этом основании признать, что $([X : Y] \leftarrow v^1)$. Если же $X$ и $Y$ универсальны, то для того чтобы убедиться в истинности $X : Y$, необходимо и достаточно убедиться в истинности $X \cdot \sim Y$ или $\sim X \cdot Y$. Этого достаточно, ибо если $[X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1$ или $[\sim X \cdot Y] \leftarrow v^1$, то все прочие возможности исключены. Таким образом, здесь получается: если $[X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1$, то $[X : Y] \leftarrow v^1$; если $[\sim X \cdot Y] \leftarrow v^1$, то $[X : Y] \leftarrow v^1$.

Аналогично обстоит дело с другими высказываниями и другими значениями истинности, когда приходится для установления значения истинности перебирать две или более возможности из числа тех, которые указаны в определении.

В принятых определениях указан общий случай. Но возможны и ограничения частного порядка. Это — признание того, что элементарные высказывания универсальны, исключение неопределенности и т. д. Приводимые обычно в курсах логики определения такого рода неявно или явно предполагают именно то, что элементарные высказывания универсальны. И благодаря этому определения принимают несколько иной вид сравнительно с тем, как они сформулированы выше. Согласно этим определениям, если известны значения истинности всех $X^1, \ldots, X^n$, то известно и значение истинности $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ и $X^1 : \ldots : X^n$.

К принятым определениям необходимо для случая универсальных элементарных высказываний сделать следующие дополнения:

$A1.$ $([X \cdot \sim Y] \leftarrow v^1) \rightarrow ([X : Y] \leftarrow v^1)$

$([\sim X \cdot Y] \leftarrow v^1) \rightarrow ([X : Y] \leftarrow v^1)$

$([X^1 \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n] \leftarrow v^1) \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow$
$\leftarrow v^1), \ldots,$

$([X^n \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1}] \leftarrow v^1) \rightarrow ([X^1 : \ldots :$
$: X^n] \leftarrow v^1)$

$A2.$ $([X] \leftarrow v^4) \rightarrow ([\sim X] \leftarrow v^1)$

$([X] \leftarrow v^3) \rightarrow ([\sim X] \leftarrow v^1)$

$([X] \leftarrow v^2) \rightarrow ([\sim X] \leftarrow v^1)$

$A3.$ $Y_1^1 \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^2), \ldots,$

$Y_1^k \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^2)$

$A4.$ $Y_2^1 \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^3), \ldots,$

$Y_2^l \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^3)$

$A5.$ $Y_3^1 \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^4, \ldots,$

$Y_3^m \rightarrow ([X^1 \cdot \ldots \cdot X^n] \leftarrow v^4)$

$A6.$ $Z_1^1 \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^1), \ldots,$

$Z_1^k \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^1)$

$A7.$ $Z_2^1 \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^2), \ldots,$

$Z_2^l \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^2)$

$A8.$ $Z_3^1 \rightarrow ([X^1 \ldots : X^n] \leftarrow v^3), \ldots,$

$Z_3^m \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^3)$

$A9.$ $Z_4^1 \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^4), \ldots,$

$Z_4^r \rightarrow ([X^1 : \ldots : X^n] \leftarrow v^4)$

## § 5. Всегда истинные высказывания

$D1$. Если $[X] \leftarrow v^1$ при любых комбинациях значений истинности элементарных высказываний, входящих в $X$, то $X$ называется всегда истинным высказыванием или тавтологией. Другими словами, если $p^1$, ..., $p^n$, суть всевозможные элементарные высказывания, входящие в $X$, и если верно

$$([p^1] \leftarrow v_1)\cdot\ldots\cdot([p^n] \leftarrow v_n) \rightarrow ([X] \leftarrow v^1),$$

где $v_1, \ldots, v_n$ суть основные значения истинности, попарно различные или тождественные в любых сочетаниях, то $X$ есть тавтология.

$D2$. Если $[X] \leftarrow nv^1$ при любых комбинациях значений истинности элементарных высказываний, входящих в $X$, то $X$ называется невыполнимым высказыванием.

$D3$. Если $[X] \leftarrow v^4$ при любых комбинациях значений истинности элементарных высказываний, входящих в $X$, то $X$ называется противоречием.

**$T1$. Если $X$ есть тавтология (противоречие), то $\sim X$ есть противоречие (тавтология).**

$D4$. Если $[X] \leftarrow v^1$ по крайней мере для одной комбинации значений истинности элементарных высказываний, входящих в $X$, то $X$ называется выполнимым высказыванием.

$T2$. Если $X$ есть тавтология, то $X$ выполнимо.

Каким (с точки зрения $D1$ — $D4$) является некоторое данное $X$, выясняется в соответствии с определениями предшествующих параграфов. В частности

$$X : \sim X,\ \sim(X\cdot\sim X),\ \sim(X\cdot\sim X\cdot Y)$$

суть тавтологии, а

$$\sim(X : \sim X),\ X\cdot\sim X,\ X\cdot\sim X\cdot Y$$

суть противоречия. Но класс тавтологий (а значит и противоречий) может быть определен аксиоматической системой. При таком аксиоматическом определении выбираются некоторые тавтологии в качестве основных (аксиомы) и указываются правила, посредством которых из них можно получить любую другую тавтологию (правила вывода из аксиом). Классическое исчисление высказываний, которое излагается во всех учебниках логики, является таким аксиоматическим построением, охватывающим все двузначные тавтологии на уровне логики высказываний.

Различение противоречия и невыполнимости связано с тем, что в случае четырехзначной оценки высказываний возможны случаи, когда $[X] \leftarrow nv^1$ и $[X] \leftarrow nv^4$. Например, всегда $[(s \leftarrow P)\ .\ (s\urcorner \leftarrow P)] \leftarrow nv^1$, но не всегда

$[(s \leftarrow P)\ .\ (s\urcorner \leftarrow P)] \leftarrow v^4$, так как $[(s \leftarrow P)\ .\ (s\urcorner \leftarrow P)] \leftarrow v^2$ при $[s \leftarrow P] \leftarrow v^2$.

Некоторые высказывания мы принимаем за истинные (за всегда истинные) по другим причинам, отличным от указанных в $D1$. Таковы, например, высказывания

$$s\alpha \leftarrow (P\alpha \downarrow s),\ (s\alpha \downarrow P)\alpha \leftarrow P$$

и т. п. из § 6 пятой главы. Они всегда истинны в том смысле, что истинны для любых субъектов и предикатов. Но они не являются тавтологиями.

## § 6. Функции истинности

Надо различать определения значений истинности для данных структур и определение (введение) новых структур через значения истинности. В первом случае значение логических знаков, входящих в данную структуру, известно до определений, во втором оно устанавливается лишь благодаря определениям. В первом случае смысл $\sim$, $\cdot$, $:$, ... известен до этих определений, поэтому они фигурируют в определяющей и определяемой частях. Во втором случае определения имеют такой вид. Символом $F(X^1, \ldots, X^n)(n \geqslant 1)$ обозначим высказывание, построенное из $X^1, \ldots, X^n$ и обладающее следующим свойством: если $([X^1] \leftarrow v_{11}) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_{n1})$, то это высказывание имеет значение $v^{i1}$; если $([X^1] \leftarrow v_{12}) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_{n2})$, то оно имеет значение $v^{i2}$; ...; если $([X^1] \leftarrow v_{1m}) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v_{nm})$, то оно имеет значение $v^{im}$ (здесь $m = 2^{2n}$, $v^{ij}$ и $v_{ij}$ могут быть тождественными и различными во всевозможных комбинациях. Такой способ введения $F$ называется функциональным (матричным, истинностным).

Введя знак $F$ (во втором случае), мы должны затем осуществить его интерпретацию, т. е. отыскать примеры, когда получается высказывание, построенное из $X^1, \ldots, X^n$ и принимающее набор значений $v^{i1}, \ldots, v^{im}$, для соответствующих комбинаций значений $v_{1i}, \ldots, v_{ni}$ высказываний $X^1, \ldots, X^n$. Причем, проверка этого высказывания должна производиться независимо от знака $F$. Последний может быть поставлен, если проверка удовлетворит условию, указанному в определении $F$. Продолжая этот процесс до предела, мы придем к некоторой совокупности вызказываний со знаками $\cdot$, $:$ и $\sim$. Так что последние в логике науки нельзя вводить определениями второго рода. Они сами суть их условия. Интересно заметить, что если мы их введем определениями второго рода, то при интерпретации $F$ вынуждены будем ссылаться на них же. Например, строим определение: если высказывание, построенное из $X$ и $Y$, принимает значение $v^1$ при $[X] \leftarrow v^1$ и $[Y] \leftarrow v^1$, значение $v^4$ при $([X] \leftarrow nv^3) \cdot ([Y] \leftarrow nv^3) \cdot (([X] \leftarrow \leftarrow v^4) \bigvee ([Y] \leftarrow v^4))$, значение $v^2$ при $([X] \leftarrow nv^3) \cdot \cdot ([Y] \leftarrow nv^3) \cdot (([X] \leftarrow v^2) \bigvee ([Y] \leftarrow v^2))$ и значение $v^3$ при $([X] \leftarrow v^3) \bigvee (([Y] \leftarrow v^3)$, то будем его изображать символом $X\&Y$. Теперь встает вопрос: а когда употребляется это $X\&Y$? Очевидно, тогда, когда $X \cdot Y$, где значение $\cdot$ не зависит от данного определения. Но в таком случае & излишний, и определение должно быть построено так, как сформулировано в начале параграфа.

Короче говоря, какие бы знаки мы ни вводили путем определений через значения истинности, они в конце концов должны быть интерпретированы с помощью знаков $\cdot$, : и $\sim$. Так что если $F^*(X^1, \ldots, X^n)$ есть высказывание, построенное из $X^1, \ldots, X^n$ с помощью $\cdot$, :, $\sim$ и, возможно, каких-то еще знаков, то для всякого $F(X^1, \ldots, \ldots, X^n)$ найдется $F^*(X^1, \ldots, X^n)$ такое, что определение значений истинности для него совпадает с определением $F(X^1 ,\ldots, X^n)$.

## § 7. Условия истинности

Пусть $X$ есть выполнимое высказывание рассматриваемого типа, а $p^1, \ldots, p^n$ суть элементарные высказывания, среди которых имеется хотя бы одно, входящее в $X$. Пусть $v^1$ и $nv^1$ образуют полный набор основных значений истинности. При установлении логических условий истинности $X$ элементарным высказываниям приписываются значения $v^1$ или $nv^1$ по правилам: 1) в данном логическом условии истинности $X$ каждому элементарному высказыванию приписывается только одно из значений $v^1$ и $nv^1$; 2) если одно и то же элементарное высказывание входит в $X$ два или более раза, то всем его вхождениям в данном логическом условии истинности $X$ приписывается одинаковое значение истинности. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ есть какая-то комбинация значений $v^1$ и $nv^1$. Если утверждение

$$([p^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([p^n] \leftarrow v_n) \rightarrow ([X] \leftarrow v^1)$$

верно в силу $A1VII3 - A3VII3$, то

$$([p^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([p^n] \leftarrow v_n)$$

есть логическое условие истинности $X$ ($D1$).

Определение $D1$ неприменимо к невыполнимым высказываниям. Договоримся, однако и последним приписывать логические условия истинности по правилам $D2$, обобщающим $D1$:

1) $[X] \leftarrow v^1$ и $([X] \leftarrow v^1) \cdot ([Y^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([Y^n] \leftarrow v^1)$ (где $n \geqslant 1$) суть логические условия истинности $X$; 2) если $X \equiv Y$, то логические условия истинности $X$ и $Y$ совпадают; 3) $([X^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([X^n] \leftarrow v^1)$ есть логическое условие истинности $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$; 4) $([X] \leftarrow v^1) \cdot ([\sim Y] \leftarrow v^1)$ и $([Y] \leftarrow v^1) \cdot ([\sim X] \leftarrow v^1)$ суть логические условия истинности $X : Y$; каждое из $([X^{i1}] \leftarrow v^1) \cdot ([\sim X^{i2}] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([\sim X^{in}] \leftarrow v^1)$ есть логическое условие истинности $X^1 : X^2 : \ldots : X^n$, где $X^{i1}, X^{i2}, \ldots, X^{in}$ суть $X^1, X^2, \ldots, X^n$, взятые в любом порядке; 5) если $\alpha$ есть логическое условие истинности $X$, а $([X] \leftarrow v^1) \cdot ([Y^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([Y^n] \leftarrow v^1)$ есть логическое условие истинности $Z$, то $\alpha \cdot ([Y^1] \leftarrow v^1) \cdot \ldots \cdot ([Y^n] \leftarrow v^1)$ есть логическое условие истинности $Z$; 6) нечто есть логическое условие истинности высказывания лишь в силу 1 — 5. Например, $([X] \leftarrow v^1) \cdot ([\sim X] \leftarrow v^1)$ есть логическое условие истинности $\sim X \cdot X$, $X : X$ и т. п.

Между высказываниями возможны различные отношения с точки зрения логических условий истинности. Нам важны здесь следующие:

1) каждое логическое условие истинности $X$ есть логическое условие истинности $Y$; будем это отношение записывать символом

$$X \not> Y;$$

2) $X \not> Y$ и при этом в $Y$ входят только такие элементарные высказывания, которые входят в $X$; будем это отношение изображать символом

$$X \gtrsim Y;$$

$T1$. Если среди $p^1, \ldots, p^n$ нет ни одного элементарного высказывания, входящего в $X$, то $([p^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([p^n] \leftarrow v_n]$ не есть логическое условие истинности $X$ при любых $v_1, \ldots, v_n$ (в силу $D1$ и $A1VII3 - A3VII3$).

$T2. \sim (p \ . \sim p \not> q); \sim (p \not> q \vee \sim q)$.

$T3$. Если в $X$ и $Y$ нет одинаковых элементарных высказываний, то $\sim (X \not\gtrsim Y)$. В самом деле, возможно такое условие истинности $X$, как $([q^1] \leftarrow v_1) \cdot \ldots \cdot ([q^n] \leftarrow \leftarrow v_n)$, где все $q^1, \ldots, q^n$ входят в $X$ и не входят в $Y$.

$T4$. Если в $Y$ входит по крайней мере одно элементарное высказывание, отсутствующее в $X$, то $\sim (X \gtrsim Y)$.

$T5$. $(X \not\gtrsim Y) \cdot (Y \not\gtrsim X) \rightarrow (X \approx Y)$

$T6$. $X \cdot Y \gtrsim Y$, $X \cdot Y \gtrsim Y$, $X \cdot Y \gtrsim Y \cdot X$, $X : Y \gtrsim Y : X$, $(X : Y) \cdot X \gtrsim \sim Y$, $(X : Y) \cdot \sim X \gtrsim Y$ и т. п.

## § 8. Термины

Термины со знаками $\sim$, $\cdot$, $:$, $\vee$, $|$ и т. д. вводятся определениями:

$Д1$. $s \leftarrow (P^1 \cdot \ldots \cdot P^n) \equiv (s \leftarrow P^1)^n \cdot \ldots \cdot (s \leftarrow P^n)$:
аналогично для: $:$, $\vee$, $|$ и прочих возможных знаков (в зависимости от возможного числа $P^1, \ldots, P^n$).

$Д2$. $((s^1 \cdot \ldots \cdot s^n) \leftarrow P) \equiv (s^1 \leftarrow P) \cdot \ldots \cdot (s^n \leftarrow P)$;

аналогично для прочих знаков $:$, $\vee$, $|$ и т. д.

Свойства таких терминов зависят от свойств соответствующих высказываний и аналогичны им (в известной мере):

$$s^1 \cdot s^2 \cdot s^3 \equiv s^1 \cdot (s^2 \cdot s^3),\ \ s^1 \cdot s^2 \equiv s^2 \cdot s^1,$$
$$P^1 \cdot P^2 \cdot P^3 \equiv P^1 \cdot (P^2 \cdot P^3),\ \ P^1 \cdot P^2 \equiv P^2 \cdot P^1$$

и т. п. Кроме того, они обладают рядом свойств, которые могут быть признаны как следствия соответствующих утверждений для высказываний или как нечто «очевидное» (на некоторой дологической основе, как аксиомы). Например,

$$(s \downarrow P^1) \downarrow P^2 \rightleftarrows s \downarrow (P^1 \cdot P^2).$$

Термины с $\sim$ вводятся в зависимости от соответствующих определений. Например,

$$\sim (s \downarrow P) \equiv s \downarrow (\urcorner P : ?P).$$

Но такие термины неудобны в обращении.

## § 9. Следствия для структурно простых высказываний

*T*1. В соответствии с принятыми определениями можно установить, что следующие высказывания суть тавтологии:

1) $(s \leftarrow E) : (s \urcorner \leftarrow E) : (s\,? \leftarrow E)$

2) $\sim (s \leftarrow E) : ((s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P) : (s\,? \leftarrow P))$

3) $\sim ((s \leftarrow P) \cdot (s \urcorner \leftarrow P))$, $\sim ((s \leftarrow P) \cdot (s\,? \leftarrow P))$,
$\sim ((s \urcorner \leftarrow P) \cdot (s\,? \leftarrow P))$,

4) $\sim ((s \leftarrow E) \cdot (s \urcorner \leftarrow E))$, $\sim ((s \leftarrow E) \cdot (s\,? \leftarrow E))$,
$\sim ((s \urcorner \leftarrow E) \cdot (s\,? \leftarrow E))$

5) $\sim (\sim (s \leftarrow E) \cdot (s\alpha \leftarrow P))$.

*T*2. Если объекты и признаки классические, то высказывания

$$(s \leftarrow E) : (s \urcorner \leftarrow E)$$
$$\sim (s \leftarrow E) : ((s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P))$$

суть тавтологии; если классическими являются оба объект и признак, то

$$(s \urcorner \leftarrow E) : ((s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P))$$

есть тавтология. Но в общем случае эти высказывания тавтологиями не будут являться. Заметим также, что

$$(s \rightarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P) : (s\,? \leftarrow P)$$
$$(s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P)$$

не всегда являются истинными: возможно, что они неопределенны; это — в случае $\sim (s \leftarrow E)$.

*T*3. Высказывания

$$(s\alpha \leftarrow P) \cdot (s\beta \leftarrow P)$$
$$(s \leftarrow P) \cdot (s \urcorner \leftarrow P) \cdot (s\,? \leftarrow P)$$
$$(s\alpha \leftarrow E) \cdot (s\beta \leftarrow E),$$

где $\alpha$ и $\beta$ различны, невыполнимы. Но противоречиями они не являются (в нашем смысле), поскольку могут иметь значения $v^2$ и (первые два) $v^3$. Высказывания же

$$(s \leftarrow E) \cdot (s \urcorner \leftarrow E) \cdot (s\,? \leftarrow E)$$
$$\sim (s \leftarrow E) \cdot (s\alpha \leftarrow P)$$

суть противоречия.

Можно установить также, что

$T4.\ (s\alpha \leftarrow P) \gtrsim \sim (s\beta \leftarrow P) \cdot \sim (s\gamma \leftarrow P),$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ таковы: если одна из них означает отсутствие $\urcorner$ и ?, то две другие означают одна $\urcorner$, а другая ?.

$T5.\ \sim (s\alpha \leftarrow P) \cdot \sim (s\beta \leftarrow P) \gtrsim (s\gamma \leftarrow P)$

$T6.\ (s\alpha \leftarrow E) \gtrsim \sim (s\beta \leftarrow E) \cdot \sim (s\gamma \leftarrow E)$

$T7.\ \sim (s\alpha \leftarrow E) \cdot \sim (s\beta \leftarrow E) \gtrsim (s\gamma \leftarrow E).$

## § 10. Построение высказываний

Если $X^1, \ldots, X^n$ суть универсальные высказывания, то для построения истинного $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ достаточно того, чтобы все $X^1, \ldots, X^n$ были истинны, а для построения истинного $X^1 : \ldots : X^n$ — чтобы одно и только одно из $X^1, \ldots, X^n$ было истинно.

Если $X^1, \ldots, X^n$ суть локальные высказывания, то для построения локально истинных $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ и $X^1 : \ldots : X^n$ помимо того, что указано выше для универсальных $X^1, \ldots, X^n$, требуется еще соблюдение тождества времени и места.

Если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ локально, то универсально истинное $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ вообще невозможно, что очевидно из определений. Если все $X^1, \ldots X^n$ локальны, то универсально истинное $X^1 : \ldots : X^n$ возможно как тавтология. Что же касается случаев, когда $X^1 : \ldots : X^n$ не есть тавтология, то оно не может быть универсально истинным по следующей причине: объекты, о которых говорится в $X^i$, являются эмпирическими; в какое-то время или в каком-то месте все они не существуют, и тогда все $X^i$ непроверяемы; значит, непроверяемо и наше высказывание; кроме того, всякое высказывание такого рода может оказаться неопределенным по аналогичным причинам.

Как видим, проблема построения истинных высказываний в рамках логики высказываний принципиального интереса не представляет. Она является действительно важной проблемой лишь в отношении некоторых высказываний, которые с точки зрения логики высказываний считаются элементарными.

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

## § 1. Проблема логического следования

Понятие логического следования является центральным в логике. К теории логического следования как к ядру тяготеет вся прочая проблематика логики. Ниже мы рассмотрим основные вопросы, связанные с понятием логического следования, на уровне общей теории логического следования. Последняя устанавливает правила логического следования для высказываний с такой структурой, какая рассматривалась в предшествующей главе, и только для таких высказываний.

Существует предрассудок, согласно которому имеется некое единое и неизменное, «природное», «подлинное» и т. п. логическое следование, и задача логики состоит лишь в том, чтобы найти наиболее точное и полное (адекватное) его описание. Этот предрассудок базируется на том общеизвестном факте, что исследователи и без изучения логики умеют рассуждать, что в науке даже в период застоя в логике были достигнуты выдающиеся результаты посредством оперирования правилами логического следования, а в наше время подобный прогресс в науке в значительнейшей части идет совершенно независимо от прогресса в логике.

Но именно попытки найти наиболее адекватное описание логического следования в современной логике фактически уже разрушили указанный выше предрассудок. На самом деле нет никакого единого, завершенного, «природного» и т. п. логического следования, для которого логики до сих пор почему-то не могут найти адекватное описание. Имеются стихийно сложившиеся навыки оперирования с высказываниями и терминами и их привычное (интуитивное) понимание. Задача логики состоит в том, чтобы усовершенствовать и уточнить интуитивное понимание такого рода навыков, осуществить их дифференциацию, выяснить их взаимоотношения и т. д. В логике фактически сложилась такая ситуация, что признаны различные формы логического следования. Ни одна из них не может считаться более «подлинной», чем другие. Все они правомерны в известном смысле. И решением проблемы наиболее адекватного описания логического следования является не избрание одной какой-то логической системы в качестве окончательной и единственной теории логического следования, а конструирование различного рода логических систем применительно к тем или иным интуитивным предпосылкам, исследование их свойств и взаимоотношений.

## § 2. Классическая теория следования

В современной логике первоначальной формой теории логического следования является классическая теория (Фреге, Рассел), суть которой состоит в следующем. Предполагается данной функционально полная двузначная пропозициальная логика или дедуктивно эквивалентное ей классическое пропозициональное исчисление с материальной импликацией. Тавтологии двузначной пропозициональной логики и соответствующие им доказуемые формулы классического пропозиционального исчисления рассматриваются как правила логического следования (при этом пропозициональные формулы рассматриваются как высказывания, а знак материальной импликации — как знак логического следования). Интуитивной предпосылкой такой интерпретации классической логики является следующее понимание логического следования: для последнего необходимо и достаточно, чтобы для истинной посылки не получалось неистинное следствие (чтобы при истином антецеденте не был неистинным консеквент).

## § 3. Неклассические теории следования

Согласно классической теории логического следования из ложного высказывания следует любое, а истинное высказывание следует из любого («парадоксы» материальной импликации). Льюис обратил внимание на то, что такого рода следствия интерпретации материальной импликации в качестве логического следования не соответствуют интуитивному пониманию последнего. Логическое следование по его мнению уже материальной импликации. Льюис построил логические системы (системы строгой импликации), в которых исключались «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной импликации. Возникла довольно обширная литература, связанная со строгой импликацией. Возникает вопрос: что дало право Льюису и его последователям рассматривать материальную импликацию как логическую форму более широкого объема, чем логическое следование? Очевидно, интуитивное понимание последнего, в которое помимо требования истинности следствий из истинных посылок включалось дополнительно еще что-то.

При интерпретации строгой импликации в качестве логического следования получались, однако, другие «парадоксальные» последствия: из невозможного высказывания следует любое, необходимое высказывание следует из любого («парадоксы» строгой импликации). Некоторыми авторами эти последствия были сочтены не соответствующими интуитивному пониманию логического следования. Стали конструировать (начиная с Аккермана) логические системы, исключающие «парадоксы» строгой импликации,— системы сильной импликации.

Однако, и системы сильной импликации не дали решения проблемы. В частности, исключение «парадоксальных» последствий в них было достигнуто за счет исключения из числа доказуемых формул таких, которые не вызывают никаких сомнений с точки зрения интуиции.

Здесь не представляется возможным более подробно рассматривать то направление логических исследований, начало которому было положено работами Льюиса. Классическая теория логического следования по ряду причин является более удобной, чем теории сильного и строгого следования. Однако, применение ее в решении ряда проблем теории научных знаний порождает серьезные трудности, если она рассматривается как общая теория дедукции. Поэтому создание неклассических теорий вполне оправдано.

Ниже мы изложим теорию, которая нам представляется наиболее подходящей с точки зрения нашей концепции научных знаний. При этом мы руководствуемся следующими принципами. Во-первых, необходимо сформулировать интуитивное понимание логического следования и в соответствии с ним строить логическую систему, по идее «формализующую» теорию логического следования. Без этого невозможно решить такие проблемы: 1) где гарантии, что исключение «парадоксальных» формул из числа доказуемых формул логической системы не ведет к исключению таких, которые вполне приемлемы с точки зрения интуиции 2) где гарантии, что исключив одни «парадоксальные» формулы, мы не обнаружим в нашей системе другие формулы, точно так же неприемлемые с точки зрения интуиции? Во-вторых, искомая теория логического следования должна быть построена не как заместитель классической (последняя не должна быть отброшена как нечто излишнее и непригодное), а как некоторая более фундаментальная логическая теория. Классическая логика должна быть сохранена, но не в качестве единственной общей теории логического следования или одного из ее вариантов, а в качестве ее фрагмента.

## § 4. Общая теория логического следования

Правила логического следования имеют источники формирования, рассмотренные в предшествующей главе, и представляют собою некоторое суммарное (или синтетическое) определение смысла логических знаков, в данном случае — знаков $\sim$ , $\cdot$, $:$, и других производных от них знаков нестрогой дизъюнкции, материальной импликации, эквивалентности и т. д. Особенность ситуации здесь состоит в том, что определяемые объекты (логические знаки) в известном смысле создаются самими определениями, и вариации последних ведут к варьированию самих этих объектов.

Правила логического следования формируются так, чтобы выполнялись требования:

I*a*. Если из $X$ логически следует $Y$, го $X \not> Y$.

I*b*. Если из $X$ логически следует $Y$, то $X \gtrsim Y$.

Правила логического следования формируются так, чтобы выполнялось требование:

II. Если из $X$ логически следует $Y$, а из $Y$ логически следует $Z$, то из $X$ логически следует $Z$.

$D1$. Логическое следование, удовлетворяющее требованию I*b*, будем называть сильным (или узким). Сохраним за ним знак $\vdash$.

$D2$. Логическое следование, удовлетворяющее требованию I$a$, будем называть ослабленным (или расширенным). Введем для него символ $\succ$.

$T1$. Если $X \succ Y$, то согласно $D2$ и $T3$VII7 в $X$ и $Y$ входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

$T2$. Если $X \vdash Y$, то согласно $D1$ и $T4$VII7 в $Y$ входят только те элементарные высказывания, которые входят в $X$.

$T3$. $(X \vdash Y) \rightarrow (X \succ Y)$

$T4$. $\sim (X \succ Y) \rightarrow \sim (X \vdash Y)$

$T5$. $(X \succ Y) \cdot ([X] \leftarrow v^1) \rightarrow ([Y] \leftarrow v^1)$

$T6$. $(X \succ Y) \cdot ([\sim Y] \leftarrow v^1) \rightarrow ([\sim X] \leftarrow v^1)$

$T7$. $(X \succ Y) \cdot ([X] \leftarrow v^1) \rightarrow \sim (X \succ \sim Y)$

$T8$. Аналогично $T5$ — $T7$ для сильного следования.

Принципиальное значение имеют следующие утверждения:

$T9$. Логическая теория, удовлетворяющая требованию

$$(X \not\succ Y) \rightarrow (X \succ Y)$$

невозможна.

$T10$. Логическая теория, удовлетворяющая требованию

$$(X \not\succ Y) \rightarrow (X \vdash Y)$$

невозможна.

Утверждение $T10$ есть следствие $T9$. Что касается $T9$, то справедливость его усматривается из следующего. Легко убедиться в том, что

$$p \not\succ (p \vee q), \ (\sim p \cdot p) \not\succ (\sim p \cdot p) \vee (\sim p \cdot q)$$

$$(\sim p \cdot p) \vee (\sim p \cdot q) \not\succ \sim p \cdot (p \vee q), \ \sim p \cdot (p \vee q) \not\succ q.$$

Если логическая теория построена так, что

$$(X \not\succ Y) \rightarrow (X \succ Y),$$

и выполнено требование, II т. е.

$$(X \succ Y) \cdot (Y \succ Z) \rightarrow (X \succ Z),$$

то из приведенных выше утверждений получим

$$\sim p \cdot p \succ q,$$

не удовлетворяющее требованию I$a$. Очевидно, при построении общей теории (ослабленного) следования какое-то из приведенных четырех утверждений не должно включаться в число правил логического следования.

*T*11. Для сильного следования утверждение

$$(X \gtrsim Y) \rightarrow (X \vdash Y)$$

не отвергается (приемлемо). И вопрос о возможности построения такой логической теории (сильного) следования, для которой это утверждение имеет силу, есть вопрос чисто технический.

Общую теорию логического следования образует совокупность утверждений вида

$$X \vdash Y \text{ или } X \succ Y,$$

где $X$ и $Y$ суть знаки высказываний, образованных из элементарных высказываний и логических знаков $\sim$, $\cdot$, $:$ (а также логических знаков, определяемых через эти). Эти утверждения получаются в силу принципов:

1) $(X \equiv Y) \rightarrow (X \dashv\vdash Y)$
2) $(X \approx Y) \rightarrow (X \dashv\vdash Y)$
3) $(X \gtrsim Y) \rightarrow (X \vdash Y)$
4) $(X \vdash Y) \rightarrow (X \succ Y)$.

Утверждения $X \succ Y$ получаются из $X \not\succ Y$ в той мере, в какой это не ведет к отступлению от I$a$.

После того, как достаточно полный перечень утверждений такого рода составлен (каким-то образом сложился), процесс может быть «перевернут». Эти утверждения можно рассматривать как определения логических знаков по принципу: такие-то логические знаки обладают свойствами, фиксируемыми в этих утверждениях; эти логические знаки изобретены именно такими, что $X^1 \vdash Y^1$, $X^2 \succ Y^2$ и т. д. Именно такой перечень утверждений образует так называемую интуитивную основу аксиоматической теории логического следования.

## § 5. Интуитивная теория логического следования

Благодаря исследованию, о котором говорилось выше, может быть построена следующая система $Z^\circ$, определяющая смысл логических знаков $\sim$, $\cdot$ и $:$ и осуществляющая первоначальное описание правил сильного логического следования.

1. $X \vdash X$
2. $X \dashv\vdash \sim\sim X$
3. $X \cdot Y \vdash X$
4. $X \cdot Y \vdash Y$
5. $X \cdot Y \vdash Y \cdot X$
6. $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \vdash X^i \ (i = 1, \ldots, n)$
7. $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \vdash X^i \cdot \ldots \cdot X^k \ (k = 1, \ldots, n)$
8. $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \vdash X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$,

где заключение отличается от посылки лишь иной расстановкой высказываний.

9. $\sim (X \cdot Y) \dashv\vdash (X \cdot \sim Y) : (\sim X \cdot Y) : (\sim X \cdot \sim Y)$
10. $\sim (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) \dashv\vdash Y^1 : \ldots : Y^k$,

где $Y^1$, ..., $Y^k$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ только наличием одного и только одного знака $\sim$ по крайней мере перед одним из $X^1$, ..., $X^n$.

11. $X : Y \vdash Y : X$
12. $X^1 : \ldots : X^n \vdash X_1 : \ldots : X_n$
13. $X : Y \dashv\vdash (X \cdot \sim Y) : (\sim X \cdot Y)$
14. $X^1 : \ldots : X^n \dashv\vdash Y^1 : \ldots : Y^n$,

где $Y^1$, ..., $Y^n$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ наличием одного и только одного $\sim$ перед всеми $X^1$, ..., $X^n$, кроме одного из них.

15. $(X : Y) \cdot X \vdash \sim Y$
16. $(X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \cdot X^1 \vdash \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n$
17. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot (X^1 : \ldots : X^i) \vdash \sim X^{i+1} \cdot \ldots \cdot \sim X^n$
18. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot (X^1 : \ldots : X^{n-1}) \vdash \sim X^n$
19. $(X : Y) \cdot \sim X \vdash Y$
20. $(X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \cdot \sim X^1 \vdash X^2 : \ldots : X^n$
21. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^i \vdash X^{i+1} : \ldots : X^n$
22. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1} \vdash X^n$
23. $\sim (X : Y) \dashv\vdash (X \cdot Y) : (\sim X \cdot \sim Y)$
24. $\sim (X^1 : \ldots : X^n) \dashv\vdash Y^1 : \ldots : Y^k$,

где $Y^1, \ldots, Y^k$ есть множество высказываний, в которое включается $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него наличием одного и только одного $\sim$ перед всеми $X^1, \ldots, X^n$ или перед $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из них (т. е. $\sim$ отсутствует по крайней мере перед двумя из $X^1, \ldots, X^n$ или имеется перед всеми).

25. $(X : Y) \cdot Z \dashv\vdash (X \cdot Z) : (Y \cdot Z)$
26. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot Y \dashv\vdash (X^1 \cdot Y) : \ldots : (X^n \cdot Y)$
27. $(X^1 : X^2) \cdot (Y^1 : Y^2) \dashv\vdash (X^1 \cdot Y^1) : (X^1 \cdot Y^2) : (X^2 \cdot Y^1) : : (X^2 \cdot Y^2)$
28. $(X^1 : \ldots : X^n) \cdot (Y^1 : \ldots : Y^m) \dashv\vdash (X^1 \cdot Y^1) : \ldots : (X^1 \cdot Y^m) : : \ldots : (X^n \cdot Y^1) : \ldots : (X^n \cdot Y^m)$
29. $X \cdot Y \cdot Z \dashv\vdash X \cdot (Y \cdot Z)$
30. $X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n \dashv\vdash Z$,

где заключение отличается от посылки лишь тем, что в нем как-то расставлены скобки.

31. $X^1 : X^2 : X^3 \vdash X^1 : (X^2 : X^3)$
32. $X^1 : \ldots : X^n \vdash Z$,

где заключение отличается от посылки лишь тем, что в нем как-то расставлены скобки.

33. $Y \vdash X^1 : X^2 : \ldots : X^n$,

где каждое из $X^1, \ldots, X^n$ есть либо $\alpha^1 p^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^m p^m$ (где $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ означают наличие или отсутствие $\sim$, а все $\alpha^{i1} p^{i1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} p^{im}$ попарно различны), либо $\sim p \cdot p \cdot Z$, а $Y$ отличается от $X^1 : X^2 : \ldots : X^n$ лишь расстановкой скобок.

Что касается других логических знаков ($\vee$, $|$, $\supset$ и т. п.), то они вводятся утверждениями типа $X \equiv Y$. Так что для них можно сформулировать утверждения типа $X \dashv\vdash Y$. Например,

$$X \vee Y \dashv\vdash \sim(\sim X \cdot \sim Y), \quad X \supset Y \dashv\vdash \sim(X \cdot \sim Y).$$

Если в системе $Z^\circ$ повсюду заменим $\vdash$ на $\succ$ и добавим утверждение

34. $\sim X \succ \sim(X \cdot Y)$,

то получим систему $Z^{01}$, дающую первоначальное («интуитивное») определение логического следования в ослабленном смысле.

Этот перечень утверждений можно было бы продолжать далее. Но это вполне заменяет дедукция, для осуществления которой достаточно принять ряд метаутверждений: разрешение подставлять на место $p$, $q$, $r$, $p^1$, $p^2$,... любые структуры высказываний, применять правило транзитивности и т. д. А это — предпосылка аксиоматизации (наряду с тем, что одни из приведенных выше утверждений можно получить с помощью таких разрешений из других).

При аксиоматизации общей теории логического следования должны быть выполнены условия:

1) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы все приведенные выше утверждения,— оно должно соответствовать интуитивному пониманию логического следования;

2) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы не любые утверждения (кроме приведенных), но лишь утверждения, удовлетворяющие требованиям I.

Аксиоматизация может быть осуществлена различными способами. Это зависит от того, что при аксиоматизации существенное значение приобретают интересы удобства, один и тот же результат может быть получен разными путями, стремление добиться полноты относительно одних требований может удовлетворяться за счет отступлений от других требований (допущение «парадоксальных» случаев), выполнение одних требований может быть реализовано за счет неполноты в отношении других и т. д. Так что возможны различные аксиоматизации не только по форме, но и по объему доказуемых утверждений.

## § 6. Теория сильного следования

Построим теорию сильного следования по принятым в логике канонам. Назовем ее системой $Z^1$.

Обозначения:

1) $p$, $q$, $r$, $p^1$, $p^2$, ... — элементарные пропозициональные формулы (пропозициональные переменные);

2) $\cdot$, $:$, $\sim$ — пропозициональные константы;

3) $\vdash$ — знак сильного следования;

4) скобки — ограничители формул.

*D*1. Пропозициональая формула:

1) элементарная пропозициональная формула есть пропозициональная формула;

2) если $X$ есть пропозициональная формула, то $\sim (X)$ есть пропозициональая формула;

3) если $X, Y, X^1, X^2, \ldots, X^n$ суть пропозициональные формулы, то $(X) \cdot (Y)$, $(X) : (Y)$, $(X^1) \cdot (X^2) \cdot \ldots \cdot (X^n)$ и $(X^1) : (X^2) : \ldots : (X^n)$ суть пропозициональные формулы;

4) нечто есть пропозициональная формула лишь в силу пунктов 1—3.

$D2$. Формула следования: $(X) \vdash (Y)$ есть формула следования, если и только если $X$ и $Y$ суть пропозициональные формулы.

$D3$. Формула:

1) пропозициональная формула есть формула;

2) формула следования есть формула.

$D4$. Вхождение в формулу:

1) $X$ входит в $X$, $\sim (X)$, $(X) \cdot (Y)$, $(Y) \cdot (X)$, $(X) : : (Y)$, $(Y) : (X)$, $(X) \cdot (Y^1) \cdot \ldots \cdot (Y^n)$, $(Y^1) \cdot \ldots \cdot (X) \cdot \ldots \cdot (Y^n)$, $(Y^1) \cdot \ldots \cdot (Y^n) \cdot (X)$, $(X) : (Y^1) : \ldots : (Y^n)$, $(Y^1) : \ldots : (X) : \ldots : (Y^n)$, $(Y^1) : \ldots : (Y^n) : (X)$;

2) $X$ входит в $(X) \vdash (Y)$ и $(Y) \vdash (X)$;

3) если $X$ входит в $Y$, а $Y$ входит в $Z$, то $X$ входит в $Z$; если $X$ входит в $Y$, а $Y$ входит в $(Z^1) \vdash (Z^2)$, то $X$ входит в $(Z^1) \vdash (Z^2)$;

4) одна формула входит в другую лишь в силу пунктов 1—3.

Для упрощения записи будем:

1) скобки в ряде случаев опускать, полагая, что $\cdot$ связывает сильнее, чем $:$ (и сильнее, чем $\vdash$), а оба они — сильнее, чем $\vdash$;

2) вместо $(X)$ писать $X$, вместо $\sim (X)$ писать $\sim X$;

3) знак $\cdot$ опускать, записывая соединяемые им формулы рядом, без интервала;

4) если $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$, то будем для сокращения писать $X \dashv\vdash Y$.

Аксиомы $Z^1$:

$A1$. $p \dashv\vdash \sim\sim p$

$A2$. $pq \vdash p$

$A3$. $pq \vdash qp$

$A4$. $pqr \dashv\vdash p(qr)$

$$p^1p^2 \ldots p^n \dashv\vdash X,$$

где $X$ отличается от $p^1p^2 \ldots p^n$ какой-то расстановкой скобок, удовлетворяйющей определению пропозициональной формулы.

A5. $\sim(pq) \dashv\vdash \sim pq : p \sim q : \sim p \sim q$

A6. $\sim(p : q) \dashv\vdash pq : \sim p \sim q$

$\sim(p^1 : p^2 : p^3) \dashv\vdash p^1p^2p^3 : p^1p^2 \sim p^3 : p^1 \sim p^2p^3 :$
$: \sim p^1p^2p^3 : \sim p^1 \sim p^2 \sim p^3$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\sim(p^1 : p^2 : \ldots : p^n) \dashv\vdash X^1 : \ldots : X^k,$

где $X^1$, ..., $X^k$ есть множество формул, в которое включается $(p^1p^2 \ldots p^n)$ и всевозможные формулы, отличающиеся от нее наличием одного и только одного $\sim$ перед всеми $p^1$, $p^2$, ..., $p^n$ или перед $i$ из них, где $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

A7. $p^1 : p^2 :\ldots: p^n \vdash X,$

где $X$ отличается от $p^1 : p^2 : \ldots : p^n$ лишь какой-то расстановкой скобок, удовлетворяющей определению пропозициональной формулы.

A8. $Y \vdash X^1 : X^2 :\ldots: X^n,$

где каждое из $X^1$, ..., $X^n$ есть либо $\alpha^1p^1 \cdot \ldots \cdot \alpha^mp^m$ (где $\alpha^1,\ldots, \alpha^m$ означают наличие или отсутствие $\sim$, а все $\alpha^{i1}p^{i1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{im}p^{im}$ попарно различны), либо $\sim ppZ$, а $Y$ отличается от $X^1 : X^2 : \ldots : X^n$ лишь расстановкой скобок.

A9. $pr : qr \vdash (p : q)\, r$

$p^1q : p^2q : p^3q \vdash (p^1 : p^2 : p^3)\, q$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$p^1q : p^2q : \ldots : p^nq \vdash \left(p^1 : p^2 : \ldots : p^n\right) q$

A10. $(p : q)\, r \vdash pr : q$

$(p^1 : p^2 : p^3)\, q \vdash p^1q : p^2 : p^3$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$\left(p^1 : p^2 : \ldots p^n\right) q \vdash p^1q : p^2 : \ldots : p^n$

$(p^1 : p^2)\,(q^1 : q^2) \vdash p^1q^1 : p^1q^2 : p^2$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\left(p^1 : \ldots p^n\right)\left(q^1 : \ldots : q^m\right) \vdash p^1q^1 : \ldots : p^1q^m : p^2 :\ldots: p^n$

Аксиомы $A4$, $A6$, $A9$ и $A10$ можно рассматривать как множества аксиом. Но можно последние строки в них рассматривать как запись общих случаев, а предшествующие им строки — как частные случаи, поясняющие общие случаи. Эта особенность аксиом связана с тем, что мы используем энарные (двух или более местные) логические константы.

Правила вывода

1) Если $X^1 \vdash X^2$, то $Y^1 \vdash Y^2$, где $Y^1 \vdash Y^2$ получается из $X^1 \vdash X^2$ путем подстановки формулы $Z$ на место элементарной пропозициональной формулы $p$ везде, где $p$ входит в $X^1 \vdash X^2$.

2) Если $X \vdash Y$ и $Y \vdash Z$, то $X \vdash Z$.

3) Если $X \vdash Y$ и $X \vdash Z$, то $X \vdash YZ$.

4) Если $X^1 \dashv\vdash X^2$ и $Y^2$ получается из $Y^1$ путем замены вхождения $X^1$ в $Y^1$ формулой $X^2$, то $Y^1 \vdash Y^2$.

*D*5. Доказуемая формула следования:

1) Аксиомы 1—10 суть доказуемые формулы следования;

2) Формулы, получающиеся из доказуемых формул по правилам 1—4, суть доказуемые формулы следования;

3) Формула следования доказуема лишь в силу пунктов 1 и 2.

Система $Z^1$ обладает следующими свойствами. Если интерпретировать пропозициональные переменные как элементарные высказывания, пропозициональные формулы — как высказывания, пропозициональные константы — как логические знаки «не», «и», и «или», то формулы сильного следования будут интерпретироваться как правила сильного следования. Не представляет труда установить, что полученная таким образом теория следования удовлетворяет требованию I*b*(*T1*). Она соответствует также изложенной выше системе $Z^\circ$ (*T2*)

*T3*. Можно показать также, что если $X \vdash Y$ есть доказуемая в $Z^1$ формула, то $X \supset Y$ есть тавтология.

*T4*. В $Z^1$ не являются доказуемыми формулы

$$\sim XX \vdash Y, \ X \vdash \sim(\sim YY), \ X \vdash X \vee Y$$

и т. п., а выражения

$$X \vdash (Y \vdash X), \ X \vdash (\sim X \vdash Y)$$

и т. п. вообще даже формулами не являются. Так что при интерпретации $Z^1$ как теории логического следования не получаются «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной, строгой (льюисовской) и сильной (аккермановской) импликаций.

*T5*. В $Z^1$ доказуемы формулы $p \vdash p : \sim p$, $p \dashv \vdash p : : p \sim p$ и т. п., вызывающие «интуитивную неудовлетворенность». По-видимому, во всякой логической системе интересующего нас типа могут быть обнаружены доказуемые формулы, которые с какой-то точки зрения будут расцениваться как «парадоксальные». И это — законная плата за дедуктивный метод.

*T6*. Как доказал Г. А. Смирнов, система $Z^1$ непротиворечива, независима и полна в том смысле, что $(X \gtrsim Y) \rightarrow \rightarrow (X \vdash Y)$.

*T7*. Использование $Z^1$ в качестве теории правил логического следования не ведет к противоречиям в научном исследовании в том смысле, что $(X \vdash Y) \cdot X \rightarrow \sim (X \vdash \sim Y)$, $X \rightarrow \sim ((X \vdash Y) \cdot (X \vdash \sim Y))$, $(X \vdash Y \cdot \sim Y) \rightarrow \sim X$.

*T8*. Формула $X \vdash Y$ доказуема в $Z^1$, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология двухзначной логики такая, что в $Y$ входят только такие пропозициональные переменные, которые входят также и в $X$ (это — следствие *T*6).

Заменим *A*2 аксиомной схемой «Если в $Y$ входят только те переменные, которые входят в $X$, то $XY \vdash X$». Полученная $Z^*$ обладает таким ствойством: $X \vdash Y$ доказуема в $Z^*$, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология, и множества переменных, входящих в $X$ и $Y$, совпадают.

## § 7. Теория ослабленного следования

Система $Z^2$ получается из $Z^1$ путем замены повсюду $\vdash$ на $\succ$, принятия дополнительной аксиомы

*A*11. $\sim p \succ \sim (pq)$

и принятия предложенного Г. А. Смирновым такого ограничения второго правила вывода: если $X \vdash Y$ и $Y \vdash Z$ и при этом в $X$, $Y$ и $Z$ входит по крайней мере одна одинаковая пропозициональная переменная, то $X \vdash Z$. Система $Z^2$, очевидно, не удовлетворяет требованию П. Но зато здесь достигается «непарадоксальность» и полнота в следующем смысле:

*T*1. $X \succ Y$ доказуема в $Z^2$, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология такая, что в $X$ и $Y$ входит хотя бы одна одинаковая переменная.

## § 8. Вырожденное следование

Построим систему $Z^3$ следующим образом. Добавим к числу аксиом $Z^1$ аксиому

$A\,12.\ \vdash \sim(\sim pp).$

К правилам вывода добавим правила:

5. Если $\vdash X$ и $\vdash Y$, то $\vdash XY$
6. Если $X \vdash Y$ и $\vdash X$, то $\vdash Y$
7. Если $X \vdash Y$ и $\vdash \sim Y$, то $\vdash \sim X$.

Примем также определение доказуемой вырожденной формулы следования $D6$:

1. Аксиома 12 есть доказуемая вырожденная формула следования.
2. Вырожденные формулы следования, получаемые из доказуемых вырожденных формул по правилам 5—7, суть доказуемые вырожденные формулы следования.
3. Вырожденная формула следования доказуема лишь в силу 1 и 2.

Система $Z^3$ дает аксиоматическое определение класса всегда истинных высказываний при интерпретации пропозициональных формул как высказываний.

*T1.* Если $X$ есть формула, доказуемая в классическом пропозициональном исчислении (или есть тавтология в двузначной логике), то $\vdash X$ доказуема в $Z^3$.

*T2.* Если $\vdash X$ доказуема в $Z^3$, то $X$ доказуема в классическом пропозициональном исчислении (тавтология в двузначной логике).

Добавим к аксиомам $Z^3$ аксиомы $p \supset q \dashv\vdash \sim(p \sim q)$, соответствующие $A9$VII2.

*T3.* Если $\vdash X \supset Y$ доказуема в дополненной таким образом $Z^3$, то $X \supset Y$ есть доказуемая формула (есть тавтология) классической логики.

## § 9. Рассуждение и следование

Надо различать использование правил логического следования в рассуждениях и установление того, имеет место логическое следование или нет. Из высказывания $X$ логически следует высказывание $Y$, если и только если имеется правило (утверждение логики), согласно которому из высказывания с такой структурой, как у $X$, логически следует высказывание с такой структурой, как $Y$. Если это действительно так, то мы получим «Из $X$ следует $Y$», и ничего более.

Процесс же рассуждения включает в себя помимо установления факта следования $Y$ из $X$ еще следующие операции:

1) признание истинности $X$; «отбрасывание» $X$ и переход к $Y$, т. е. признание истинным $Y$ и использование его в последующих операциях, если таковые совершаются;

2) признание того, что $Y$ неистинно, «отбрасывание» $Y$ и признание того, что $\sim X$ истинно ($X$ неистинно), т. е. переход к $\sim X$ и использование его в последующих операциях, если таковые совершаются.

Конечным результатом процесса рассуждения является признание какого-то высказывания $Y$ на том основании, что признаны какие-то другие высказывания $X^1$, ..., $X^n$, и наше результирующее высказывание получено из них по правилам логического следования. Каким бы разветвленным и многоступенчатым не был процесс рассуждения, он всегда может быть (в принципе) представлен в такой форме:

1) Из $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ логически следует $Y$.

2) $X^1$, ...., $X^n$ все истинны.

3) Значит, $Y$ истинно.

Иное дело, не всегда практически возможно и целесообразно построение первого утверждения (т. е. перечень всех предпосылок для признания $Y$).

## § 10. Высказывания о следовании

Высказывание, в котором говорится о том, что $X \vdash Y$, не есть сложное высказывание, построенное из $X$ и $Y$. Оно является элементарным с точки зрения общей теории логического следования. Субъект его — пара терминов $([X], [Y])$, предикат — $\vdash$ («Из первого логически следует второе»). По отношению к $X$ и $Y$ оно есть метавысказывание. Свойства предиката $\vdash$ частично определены в общей теории логического следования, частично же определяются в других разделах логики (см. далее). Все это относится к прочим формам следования. Определение предикатов следования строится путем перечисления тех случаев, когда одни высказывания следуют из других. Предикаты следования суть частный случай предикатов, определяемых в логике, — логических предикатов.

## § 11. Расширения общей теории следования

Теория логического следования не исчерпывается общей теорией. По мере рассмотрения структуры высказываний, которые считаются элементарными с точки зрения общей теории, к числу общих правил логического следования добавляются специальные. В том числе добавляются и правила, относящиеся к структурно простым высказываниям:

$A1.$ $\vdash \sim ((s \leftarrow E), (s, \urcorner \leftarrow E)), \vdash \sim ((s \leftarrow E)\ (s? \leftarrow E)),$
$\vdash \sim ((s \urcorner \leftarrow E)\ (s? \leftarrow E)).$

$A2.$ $\vdash \sim ((s \leftarrow P)\ (s \urcorner \leftarrow P)), \vdash \sim ((s \leftarrow P)\ (s? \leftarrow P)),$
$\vdash \sim ((s \urcorner \leftarrow P)\ (s? \leftarrow P)).$

$A3.$ $\vdash \sim (\sim (s \leftarrow E)\ (s\alpha \leftarrow P)).$

Следствия *A1* и *A2*:

$T1.$ $\vdash ((s \leftarrow E) : (s \urcorner \leftarrow E) : (s? \leftarrow E)).$

$T2.$ $\vdash (\sim (s \leftarrow E) : ((s \leftarrow P) : (s \urcorner \leftarrow P)\ (s? \leftarrow P))).$

$T3.$ $(s\alpha \leftarrow E) \vdash \sim (s\beta \leftarrow E) \sim (s\gamma \leftarrow E),$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ таковы, что если один из них означает отсутствие $\urcorner$ и ?, то два другие означают один $\urcorner$ и другой?.

$T4.$ $(s\alpha \leftarrow P) \vdash \sim (s\beta \leftarrow P) \sim (s\gamma \leftarrow P).$

$T5.$ $\sim ((s\alpha \downarrow P)\ \beta \leftarrow P), \sim ((s\alpha \downarrow E)\ \beta \leftarrow E),$

где $\alpha$ и $\beta$ различны.

# КЛАССЫ

## § 1. Классы

*D1*. Если $t$ есть индивидуальный термин, то соответствующий ему предмет П есть индивид.

*D2*. Если $t^i$ есть индивидуальный термин из области значения $t$, а $П^i$ — обозначаемый им предмет, то $П^i$ есть индивид из области значения $t$.

*D3*. Образовать (и выбрать) некоторый класс индивидов — значит указать (назвать), что индивиды из области значения таких-то терминов (такого-то термина) включаются в этот класс. Упомянутые индивиды суть элементы (представители) этого класса. Термины «класс» и «множество» суть синонимы.

При образовании класса должны быть выполнены следующие принципы (это — часть определения класса):

*A1*) Каждый элемент класса может быть выбран независимо от образования (и выбора) самого класса,— принцип независимости элементов от класса.

*A2*) Относительно любого индивида возможно установить, является он элементом данного класса или нет,— принцип определенности.

*D4*. Класс индивидов существует (не существует), если он образован (не образован) в соответствии с *D3* и принципами независимости и определенности.

Образовать класс индивидов — значит буквально сказать «Класс индивидов из области значения такого-то термина (таких-то терминов)», т. е. построить определенный термин. В языках это может выразиться в различной форме, но суть всегда такова. Для существования класса достаточно его образовать. Например, построив выражение «класс богов», мы образовали класс богов, и этот класс стал существовать как особый предмет, хотя считается, что боги эмпирически не существуют.

Различие класса и энки наглядно видно из такого примера. Тройка целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего, не существует. Но класс таких троек существует, если только мы построили выражение «Класс троек целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего». Этот класс может исследоваться как особый существующий предмет. О нем, в частности, можно сказать, что он пуст. Если всякий предмет есть энка, то нечто аналогичное неверно для класса: возможен класс из одного элемента, допустим — П; но чтобы образовать здесь класс, надо сказать «Класс, элементом которого является П».

Следствием принципа независимости элемента от класса является то, что класс не может быть элементом самого себя. Отсюда получаем, что класс всех классов не существует. Не существует также класс всех классов, включающих себя в качестве элемента. Таким образом, этот принцип избавляет от известных парадоксов теории множеств.

Если найдется хотя бы один индивид, относительно которого невозможно выяснить, является он элементом некоторого класса или нет, то такой класс не существует (неверно образован).

*D5*. Класс является эмпирическим, если и только если все его элементы суть эмпирические объекты, и абстрактным, если и только если все его элементы суть абстрактные объекты.

Не исключена возможность образования классов из эмпирических и абстрактных объектов (смешанные классы).

При образовании эмпирических классов указывается время и область пространства, в которых существуют их элементы. Если такое указание отсутствует, то предполагается любое время и пространство.

Примем обозначения:

1) $Kt$ — «Класс индивидов из области значения $t$» или просто «Класс $t$»;

2) $t^i \in Kt$ — «Индивид из области значения $t^i$ есть элемент класса $t$ (включается в класс $t$)»;

3) $t^i \neg \in Kt$ — «Индивид из области значения $t^i$ не есть элемент класса $t$ (не включается в класс $t$)»;

*А3*. $Kt$ есть термины, если и только если $t$ есть термин. Если $t$ термин, то $Kt$ индивидуальный термин.

*T1.* Если $t$ не есть термин (не имеет значения), то $Kt$ не есть термин. В частности, выражение «все $t$» не есть термин, а потому и выражение «Класс всех $t$» не есть термин (такого класса нет).

*T2.* Класс индивидов есть индивид.

*A4.* $(Kt \leftarrow E) : (Kt \urcorner \leftarrow E)$

*A5.* $\sim (t^i \in Kt) \equiv (t^i \urcorner \in Kt)$

*T3.* $(t^i \in Kt) : (t^i \urcorner \in Kt)$

Символ $K$ (и слово «класс») в указанном выше смысле не есть термин той науки, в которой терминами являются $t$ и $Kt$: это — логическое средство образования нового термина из данного термина $t$ и тем самым средство выделения (выбора) особого предмета — всех индивидов из области значения $t$.

Но слово «класс» употребляется и как самостоятельный термин. Введем для этой цели символ $K^*$. Обычно он употребляется как термин, обозначающий любой класс. В явной форме это его понимание запишется определением: $K^*$ есть термин такой, что $K^* \rightharpoondown Kt$, где $t$ есть любой термин.

В упомянутом понимании $K^*$ заключена логическая ошибка: предполагается, что $t$ есть любой термин, тогда как по правилам определения $t$ не может быть зависимым по значению от определяемого термина $K^*$ (т. е. не может быть термином, в который входит $K^*$ или в определяющую часть которого входит $K^*$). Следствием этой ошибки являются утверждения $K^* \rightarrow KK^*$ и $KK^* \in KK^*$, ведущие к известным парадоксам. Правильным будет лишь такое определение:

*D6.* $K^*$ есть термин такой, что $K^* \rightharpoondown Kt$, где $t$ есть любой термин, не зависящий по значению от $K^*$. Или в другой форме: $([t^1] \in \alpha) \cdot ([t^2] \in \beta) \rightarrow (K^* \rightharpoondown Kt^1) \cdot \sim (K^* \rightharpoondown Kt^2)$, где $\alpha$ есть класс терминов, не зависящих от $K^*$, а $\beta$ — зависящих.

## § 2. Зачисление в класс

Зачисление в класс осуществляется по соглашениям и в соответствии с правилами логики. Из числа последних обычно используются следующие:

*A1.* $(t \rightharpoondown t^i) \rightarrow (t^i \in Kt)$

*A2.* $(s \leftarrow PX^\circ) \leftrightarrow (s \in Ks^* \downarrow PX^\circ(s/s^*))$

$T1.\ t \in Kt$

$T2.\ \sim (t^i \in Kt) \rightarrow \sim (t \rightarrow t^i)$

$T3.\ (P \in KQ) \leftrightarrow (\downarrow(s\alpha \leftarrow P) \in K\downarrow(s\alpha \leftarrow Q))$

$T4.\ (s\alpha \leftarrow P) \leftrightarrow (s \in Ks^*\alpha\downarrow P)$

$T5.\ (s \urcorner \in Ks^*\downarrow PX(s/s^*)) \leftrightarrow \sim (s \leftarrow PX^\circ)$

$T6.\ (s \urcorner \in Ks^*\downarrow P) \leftrightarrow \sim (s \leftarrow P)$

$T7.\ s^i \in Ks \downarrow PX \rightarrow X(s/s^i)$

## § 3. Классы классов

Элементами некоторого класса могут быть какие-то классы. При этом важно иметь в виду следующее. Если мы образовали класс классов, то элементы этого класса суть все те классы, которые образованы по приведенным выше правилам и могуть быть выбраны независимо от самого класса, в который они включаются в качестве элемента. И такой класс не может включать в себя все классы согласно самому понятию «класс».

Чтобы образовать класс классов, надо выполнить одну из двух операций:

1) образовать термин «Класс, элементы которого суть классы $Kt^1, \ldots, Kt^n$»,
где $n \geqslant 2$, и все термины $Kt^1, \ldots, Kt^n$ суть термины классов;

2) образовать термин $t^m$ такой, что

$$t^m \rightharpoonup Kt^1, \ldots, t^m \rightharpoonup Kt^n,$$

и затем построить термин

$$Kt^m.$$

Примеры $t^m$: «пустой класс», «конечный класс», «бесконечный класс» и т. п. Соответственно получим $Kt^m$: «Класс пустых классов», «Класс конечных классов» и т. п.

Часто тот факт, что некоторый термин есть термин класса классов, в обычных и научных языках бывает скрыт от непосредственного видения. Возьмем, например, выражения «Класс офицеров, служащих в одном полку», «Класс членов одной партии», «Класс молекул, находящихся в данном объеме пространства» и т. п. Хотя они по-видимости имеют структуру $Kt$, где $t$ не есть термин класса, однако на самом деле они суть термины типа $t^m$. Так, термин «Класс офицеров, служащих в одном полку», является родовым по отношению к терминам «Класс офицеров 110 авиаполка ВВС СССР», «Класс офицеров 109 авиаполка ВВС СССР» и т. п., но сам еще не является термином класса типа $Kt$.

## § 4. Ограничения понятия класса

Если образован $Kt$, не представляет труда построить такой $t^i$, который будет считаться индивидуальным и для которого будет иметь силу $t^i \in Kt$. Вопрос о существовании обозначаемых этим термином индивидов при этом остается открытым. Так что среди элементов класса могут оказаться несуществующие индивиды. Это порождает некоторые практические неудобства. На практике оперируют более узким понятием класса: в класс включают существующие индивиды из области значения данного термина. Будем такой класс называть экзистенциальным и определим его так:

$D1.\ K^e t = Df . K (t \downarrow E),$

Забегая вперед, скажем, что возможно еще одно понятие класса, промежуточное между $Kt$ и $K^e t$,— понятие потенциального класса. Обозначим его $K^м t$ и определим так:

$D2.\ K^м t = Df . K (t \downarrow M).$

где $t \downarrow M$ читается как «$t$, который возможен» (понятие возможности рассмотрим ниже в двенадцатой главе). Потенциальные классы, в свою очередь, можно разделить на группы в зависимости от того, какая возможность имеет место — логическая или фактическая («физическая»).

## § 5. Пустые и непустые классы

$D1.$ $K^e t$ будем считать пустым, если для любого $t^i$ такого, что $t \rightarrow t^i$, имеет место $\sim (t^i \leftarrow E)$, и непустым, если найдется такой $t^i$, что $(t \rightarrow t^i) \cdot (t^i \leftarrow E)$. При этом о существовании и несуществовании речь здесь идет в том смысле, в каком это предполагается характером индивидов и определением класса (т. е. не обязательно существование в данное время; возможно — существование в прошлом; не обязательно эмпирическое существование и т. д.).

*D2*. Определение пустоты и непустоты $K^{м}t$ получается из *D1* путем замены $E$ на $M$.

*D3*. $Kt$ экзистенциально (потенциально) пуст, если и только если $K^{e}t$ ($K^{м}t$) пуст.

*D4*. $Kt$ пуст, если и только если отсутствует такой $t^{i}$, что

$$t^{i} \in Kt.$$

*T1*. Если $Kt$ пуст, то он экзистенциально и потенциально пуст.

Например, класс спортсменов, прыгающих в высоту на 2 метра 30 сантиметров, экзистенциально пуст. Если этот класс экзистенциален, то он просто пуст. Если же он потенциален, то он не пуст. Если $K^{e}t$ пуст, то в него не включается никакой элемент (нельзя назвать и вообще как-то выбрать такой индивид $t^{i}$, что $t^{i} \in K^{e}t$), поскольку $(t \downarrow E) \leftarrow E$. Но случай, когда невозможно назвать индивид, включаемый в $Kt$, кажется сомнительным: исследователь всегда по своему произволу может построить такой термин $t^{i}$, который будет считаться индивидуальным (в соответствии с принятыми нормами) и для которого верно $t \rightharpoonup t^{i}$; если $Kt$ экзистенциально пуст, то $\sim (t^{i} \leftarrow E)$. Так что определение пустого класса как класса, не содержащего элементов, предполагает внелогические ограничения: то, что указано в определяющей части *D4*, верно в силу принятых в данной области науки соглашений и вытекающих из них следствий.

## § 6. Универсальные классы

Определение универсального класса как класса, в который включаются все индивиды, ведет к противоречиям, так как построить такой класс невозможно (в силу принятых выше соглашений). Поэтому при определении универсального класса (как и пустого) надо исходить из того, что класс как-то образован в соответствии с принятыми правилами, т. е. уже дан.

*D1*. $Kt$ является универсальным, если и только если для любого индивида $t^{i}$ имеет силу $t^{i} \in Kt$.

Универсальный класс не есть класс всех индивидов. Его определение имеет такой смысл: если построен термин $Kt$ и если при этом для любого индивида, для которого построен термин $t^{i}$, имеет силу $t^{i} \in Kt$, то такой $Kt$

называется универсальным. При этом предполагается, что правила построения терминов (и образования классов, в том числе) соблюдены.

По аналогии с определениями экзистенциальной и потенциальной пустоты возможны определения:

*D*2. $K^e t$ ($K^M t$) универсален, если и только если для любого индивида $t^i$ имеет силу

$$(t^i \downarrow E) \in K^e t \qquad ((t^i \downarrow M) \in K^M t).$$

*D*3. $Kt$ экзистенциально (потенциально) универсален, если и только если $K^e t$ ($K^M t$) универсален.

*T*1. Если $Kt$ универсален, то он универсален экзистенциально и потенциально.

## § 7. Производные классы

*D*1. Классы, обозначаемые терминами вида $Kt$, суть первичные классы. Соответственно термины $Kt$ суть первичные термины классов (или термины первичных классов).

С помощью первичных терминов классов образуются производные термины классов (термины производных классов; производные классы). Обычно рассматривают такие:

1) $Kt^1 \cap Kt^2$ — логическое произведение $Kt^1$ и $Kt^2$; аналогично $Kt^1 \cap Kt^2 \cap \ldots \cap Kt^n$ есть логическое произведение $Kt^1, \ldots, Kt^n$ $(n \geqslant 2)$;

2) $Kt^1 \cup Kt^2$ — логическая сумма $Kt^1$ и $Kt^2$; аналогично $Kt^1 \cup Kt^2 \cup \ldots \cup Kt^n$ есть логическая сумма $Kt^1, \ldots, Kt^n$.

3) $K \sim t$ — логическое дополнение $Kt$.

*D*2. $Kt^1 \cap Kt^2$ есть класс такой, что для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt^1) \cdot (t^i \in Kt^2) \leftrightarrow (t^i \in Kt^1 \cap Kt^2);$$

аналогично $Kt^1 \cap Kt^2 \cap \ldots \cap Kt^n$ есть класс такой, что для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt^1) \cdot (t^i \in Kt^2) \cdot \ldots \cdot (t^i \in Kt^n) \leftrightarrow (t^i \in Kt^1 \cap Kt^2 \cap \ldots \cap Kt^n).$$

*D*3. $Kt^1 \cup Kt^2$ есть класс такой, что для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt^1) \vee (t^i \in Kt^2) \leftrightarrow (t^i \in Kt^1 \cup Kt^2);$$

аналогично $Kt^1 \cup Kt^2 \cup \ldots \cup Kt^n$ есть класс такой, что для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt^1) \vee (t^i \in Kt^2) \vee \ldots \vee (t^i \in Kt^n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (t^i \in Kt^1 \cup Kt^2 \cup \ldots \cup Kt^n).$$

*D*4. $K \sim t$ есть класс такой, что для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt) : (t^i \in K \sim t).$$

*D*5. $Kt^1 \cup \ldots \cup Kt^n$, $Kt^1 \cap \ldots \cap Kt^n$, $K \sim t$ суть термины классов. Образование их есть в то же время образование классов со свойствами, указанными в *D*2, *D*3 и *D*4.

Термин «Класс индивидов из областей значения $t^1, \ldots, t^n$» (или «Класс, в который включаются $t^1, \ldots, t^n$») есть частный случай $Kt^1 \cup \ldots \cup Kt^n$.

## § 8. Отношения классов

Отношения классов не тождественны отношениям терминов, хотя между ними имеется связь. Так, из $t^1 \rightharpoonup t^2$ не следует $Kt^1 \rightharpoonup Kt^2$: последние суть индивидуальные термины; и если $Kt^1 \rightharpoonup Kt^2$, то и $Kt^2 \rightharpoonup Kt^1$, что не всегда верно для $t^1 \rightharpoonup t^2$.

Примем обозначения:

1) $Kt^1 \subset Kt^2$ — $Kt^1$ включается в $Kt^2$;
2) $Kt^1 \subset\supset Kt^2$ — $Kt^1$ и $Kt^2$ совпадают.

*D*1. $Kt^1 \subset Kt^2$, если и только если для любого индивида $t^i$

$$(t^i \in Kt^1) \to (t^i \in Kt^2).$$

*D*2. $Kt^1 \subset\supset Kt^2 \equiv (Kt^1 \subset Kt^2) \cdot (Kt^2 \subset Kt^1)$

*A*1. $(t^1 \rightharpoonup t^2) \leftrightarrow (Kt^2 \subset Kt^1)$.

*D*3. Если $Kt^1 \subset Kt^2$, то $Kt^1$ есть подкласс $Kt^2$; если $(Kt^1 \subset Kt^2) \cdot \sim (Kt^2 \subset Kt^1)$, то $Kt^1$ есть собственный подкласс $Kt^2$.

Из определений получаем известные положения:

*T*1. $Kt^1 \cap Kt^2 \subset\supset Kt^2 \cap Kt^1$, $Kt^1 \cup Kt^2 \subset\supset Kt^2 \cup Kt^1$

*T*2. $Kt^1 \cap Kt^2 \subset Kt^1$, $Kt^1 \cap Kt^2 \subset Kt^2$

*T*3. $Kt^1 \subset Kt^1 \cup Kt^2$, $Kt^2 \subset Kt^1 \cup Kt^2$

*T*4. $Kt^1 \cup Kt^1 \subset\supset Kt^1$, $Kt^1 \cap Kt^1 \subset\supset Kt^1$

*T*5. $Kt^1 \cap Kt^2 \cap Kt^3 \subset\supset Kt^1 \cap (Kt^2 \cap Kt^3)$

*T*6. $Kt^1 \cup Kt^2 \cup Kt^3 \subset\supset Kt^1 \cup (Kt^2 \cup Kt^3)$

$T\,7.\ (Kt^1 \cup Kt^2) \cap Kt^3 \subset\supset (Kt^1 \cap Kt^3) \cup (Kt^2 \cap Kt^3)$

$T\,8.\ (Kt^1 \cap Kt^2) \cup Kt^3 \subset\supset (Kt^1 \cup Kt^3) \cap (Kt^2 \cup Kt^3)$

$T9$. Если $Kt^1$ пуст, то $Kt^1 \cup Kt^2 \subset\supset Kt^2$

$T10$. Если $Kt^1$ пуст, то $Kt^1 \cap Kt^2 \subset\supset Kt^1$

$T11$. Если $Kt^1$ универсален, то $Kt^1 \cup Kt^2 \subset\supset K^{t1}$

$T12$. Если $Kt^1$ универсален, то $Kt^1 \cap Kt^2 \subset\supset Kt^2$

$T\,13.\ (Kt^1 \subset Kt^2) \to (Kt^1 \cup Kt^3 \subset Kt^2 \cup Kt^3)$

$T\,14.\ (Kt^1 \subset Kt^2) \to (Kt^1 \cap Kt^3 \subset Kt^2 \cap Kt^3)$

$T\,15.\ (Kt^1 \subset\supset Kt^2) \to (Kt^1 \cup Kt^3 \subset\supset Kt^2 \cup Kt^3)$

$T\,16.\ (Kt^1 \subset\supset Kt^2) \to (Kt^1 \cap Kt^3 \subset\supset Kt^2 \cap Kt^3)$

$T\,17.\ (Kt^1 \rightleftharpoons K \sim t^2) \to (Kt^2 \rightleftharpoons K \sim t^1)$

$T\,18.\ (Kt^1 \subset Kt^2) \cdot (Kt^2 \subset Kt^3) \to (Kt^1 \subset Kt^3)$

$T\,19.\ (t^1 \to t^2) \to (Kt^2 \subset Kt^1)$

$T\,20.\ (Kt^1 \subset Kt^2) \to (t^2 \to t^1)$

$T21$. $Kt \cap K \sim t$ пуст, $Kt \cup K \sim t$ универсален.

$T22$. Если $Kt^1$ пуст, то для любого $Kt^2$ имеет силу $Kt^1 \subset Kt^2$ (следствие $D4IX4$). Если $Kt^1$ универсален, то для любого $Kt^2$ имеет силу $Kt^2 \subset Kt^1$ (следствие $D1IX5$).

$T23$. Если $Kt^1$ и $Kt^2$ оба пусты, то $Kt^1 \subset\supset Kt^2$.

$T24$. Если $Kt^1$ и $Kt^2$ оба универсальны, то $Kt^1 \subset\supset Kt^2$.

$T25$. Если $Kt^1 \subset Kt^2$ и $t^2$ есть индивидуальный термин, то $Kt^2 \subset Kt^1, Kt^1 \subset\supset Kt^2$.

Для классов, элементы которых суть энки индивидов, согласно $A4VII$ и $A5VII$ имеют силу утверждения:

$T\,26.\ (t^i \to t^k) \to (K(t^1,\ldots,t^n) \subset K(t^1,\ldots,t^n)(t^k/t^i))$,

где $t^k$ есть любой из $t^1, \ldots, t^n$.

$T\,27.\ \sim (Kt^k \subset K(t^1,\ldots,t^n)), \sim (K(t^1,\ldots,t^n) \subset Kt^k)$.

## § 9. Термины

Из высказываний о классах образуются термины следующего вида:

1) $t^i \downarrow \in Kt, t^i \downarrow \neg \in Kt$ — «$t^i$, который включается (не включается) в $Kt$»;

2) $(Kt^1) \downarrow \subset Kt^2, (Kt^1) \downarrow \neg \subset Kt^2$

3) $(Kt) \downarrow PX$, где в $X$ входит термин $Kt$.

По правилам, рассмотренным в § 7 пятой главы, образуются термины вида

$$t^i \downarrow \in Kt^1 \cdot \in Kt^2, t^i \downarrow \in Kt^1 \cdot \urcorner \in Kt^2, (Kt^1) \downarrow \subset Kt^2 \cdot \urcorner \subset Kt^3$$

и т. п. (аналогично со знаком: ; возможны комбинации со знаками : и $\cdot$).

Примем определение:

$D1$. $Kt^1$ и $Kt^2$ несовместимы, если и только если для любого индивида $t^i$

$$((t^i \downarrow \in Kt^1) \urcorner \in Kt^2) \cdot ((t^i \downarrow \in Kt^2) \urcorner \in Kt^1).$$

## § 10. Число элементов класса

Хотя теория чисел является частью математики, становится традицией излагать ее основания в рамках логики. Мы, однако, ограничимся здесь лишь краткими замечаниями, имеющими непосредственное отношение к излагаемой концепции логической теории знаний.

Числа суть абстрактные объекты особого рода. Нас здесь интересуют такие из них, которые изобретаются для познания классов и обозначаются знаками «ноль», «один», «два» и т. д. (знаками натуральных чисел), «конечное число» («конечно»), «бесконечное число» («бесконечно»). Они изобретаются в соответствии с некоторыми интуитивными предпосылками, которые частично можно зафиксировать в такой системе определений и утверждений.

$D1$. Если $\alpha$ есть число такое, что $Kt \Leftarrow \alpha$, то $\alpha$ есть число элементов $Kt$. Выражения «Число элементов $Kt$ равно $\alpha$», «Число элементов $Kt$ есть $\alpha$», «Число $t$ есть $\alpha$» и т. п. суть лишь варианты записи того факта, что $Kt \Leftarrow \alpha$.

$A1$. Если $Kt$ пуст, то число элементов его есть ноль (0).

$A2$. Если $t$ есть индивидуальный термин, то число элементов $Kt$ есть единица (1).

$A3$. Если $Kt^1$, $Kt^2$, ..., $Kt^n$ $(n \geqslant 12)$ несовместимы, число элементов $Kt^1$ есть $\alpha^1$, число элементов $Kt^2$ есть $\alpha^2$, ..., число элементов $Kt^n$ есть $\alpha^n$, то число элементов $Kt^1 \cup Kt^2 \cup \ldots \cup Kt^n$ есть $\alpha^1 + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n$ (сумма чисел $\alpha^1$, $\alpha^2$, ..., $\alpha^n$).

$D2$. Между $Kt^1$ и $Kt^2$ имеет место взаимнооднозначное соответствие, если и только если возможно каждому элементу одного из них поставить в соответствие один и только один элемент другого так, что попарно различным элементом одного ставятся в соответствие попарно различные элементы другого.

*A*4. Число элементов $Kt^1$ равно числу элементов $Kt^2$ (классы $Kt^1$ и $Kt^2$ равночисленны), если и только если имеет место взаимнооднозначное соответствие $Kt^1$ и $Kt^2$. Если $\alpha$ есть число элементов $Kt^1$, а $\beta$ — $Kt^2$, то равночисленность $Kt^1$ и $Kt^2$ записывается символом $\alpha = \beta$.

*A*5. Число элементов $Kt^1$ больше числа элементов $Kt^2$, если и только если имеет силу следующее: какой бы собственный подкласс $Kt^3$ класса $Kt^1$, находящийся во взаимнооднозначном соответствии с $Kt^2$, не выбрали, останется такой элемент $Kt^1$, который не ставится в соответствие никакому элементу $Kt^2$. Если $\alpha$ есть число элементов $Kt^1$, а $\beta$ — $Kt^2$, то «$\alpha$ больше $\beta$» записывается символом $\alpha > \beta$.

*D*3. $\alpha < \beta \equiv \beta > \alpha$.

*A*6. Число элементов класса конечно в следующих (и только в этих) случаях:

1) если число элементов $Kt$ есть единица, то число элементов $Kt$ конечно;

2) если $Kt \subset\supset Kt^1 \cup Kt^2$, число элементов $Kt^1$ конечно и число элементов $Kt^2$ конечно, то число элементов $Kt$ конечно.

*A*7. Число элементов $Kt$ бесконечно, если и только если невозможно построить такие $Kt^1$ и $Kt^2$, число элементов каждого из которых конечно и $Kt \subset\supset Kt^1 \cup Kt^2$.

Из принятых определений и утверждений получаются следствия:

*T* 1. $(\alpha = \beta) \leftrightarrow \sim(\alpha > \beta) \cdot \sim(\beta > \alpha)$

*T* 2. $(Kt^1 \subset Kt^2) \rightarrow \sim(\alpha > \beta)$,

где $\alpha$ есть число элементов $Kt^1$, а $\beta$ — $Kt^2$.

*T* 3. $(Kt^1 \subset\supset Kt^2) \rightarrow (\alpha = \beta)$.

*T*4. Если $\alpha^1$ есть число элементов $Kt^1$, $\alpha^2$ — $Kt^2$, $\alpha^3$ — $Kt^3$, $\alpha$ — $Kt$, то

1) $(\alpha^1 + \alpha^2) = (\alpha^2 + \alpha^1)$

2) $(\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3) = (\alpha^1 + (\alpha^2 + \alpha^3))$

3) $(\alpha + 0) = \alpha$

4) $(\alpha^1 = \alpha^2) \to ((\alpha^1 + \alpha^3) = (\alpha^2 + \alpha^2))$.

*T*5. Если $Kt^1 \subset\!\!\!\!\!\!\;\supset Kt^2$, то между $Kt^1$ и $Kt^2$ имеет место взаимнооднозначное соответствие.

*T*6. Если один из $Kt^1$ и $Kt^2$ есть собственный подкласс другого и при этом конечен, то между $Kt^1$ и $Kt^2$ нет взаимнооднозначного соответствия.

Но известны случаи, когда имеет место взаимнооднозначное соответствие класса и его собственного подкласса, если они оба бесконечны (например, это имеет место для класса натуральных чисел вообще и четных чисел). Поэтому неверно (в общем случае) утверждение: если $Kt^1$ есть собственный подкласс $Kt^2$, то число элементов первого меньше числа элементов второго. Неверно также утверждение: если числа элементов $Kt^1$ и $Kt^2$ бесконечны, то $Kt^1$ и $Kt^2$ равночисленны.

В теории чисел отвлекаются от того, для какой цели изобретаются такие абстрактные объекты, как числа, и рассматривают их сами по себе, как самостоятельные объекты.

Однако, интуитивные основания предопределяют в некоторой степени то, какой вид примут определения и утверждения, относящиеся к ним. Возьмем, например, определение натурального числа. Оно имеет такой вид:

1) 1 есть натуральное число;

2) если $\alpha$ есть натуральное число, то $\alpha + 1$ есть натуральное число;

3) если по соглашению $\alpha = \beta$ (т. е. $\alpha = Df.\ \beta$), где $\beta$ есть натуральное число, то $\alpha$ есть натуральное число (здесь имеются в виду определения, образующие систему счисления, в частности — десятичную: $2 = Df.\ 1+1$, $3 = Df.\ 2+1$ и т. д.).

4) нечто есть натуральное число лишь в силу 1—3. Затем формулируются утверждения, определяющие свойства (правила оперирования) $+$, $=$, 0 и т. д.:

$$\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^1, \alpha + 0 = \alpha, \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^1 + (\alpha^2 + \alpha^3)$$

и т. д. Аналогия этого с приведенной выше системой определений очевидна.

Число элементов классов фиксируется также выражениями «много», «мало», «очень много», «очень мало» и т. п. (это — неопределенные или архаические числа). Из них интерес представляют практически бесконечные (можно так сказать) числа: это суть случаи, когда число элементов класса является настолько большим (хотя и конечным), что его можно принять за бесконечное.

## § 11. Состав и мощность класса

*D*1. Выяснить состав класса — значит выяснить, какие индивиды включаются в него. Выяснить экзистенциальный (потенциальный) состав класса — значит выяснить, какие существуют (возможны) индивиды, являющиеся его элементами.

*D*2. Мощность класса есть число его элементов. Экзистенциальная (потенциальная) мощность класса есть число существующих (возможных) индивидов, являющихся его элементами.

Если задан класс и требуется выяснить его состав и мощность, то исследователь это делает всегда в какое-то определенное время. Это не всегда то время, которое может фигурировать в самом определении класса (например, «Русские писатели XIX века»), а именно то время, когда исследователь предпринимает какие-то действия, чтобы установить состав и мощность класса.

При этом класс может быть задан так, что в него включаются только те индивиды, которые существуют в это время. С этой точки зрения классы могут быть постоянными и переменными по составу и по мощности:

1) постоянными в данном временном интервале — в какое бы время в этом интервале исследователь ни стал выяснять состав класса, он получил бы тот же результат; аналогично для мощности; постоянными вообще — в любое время исследователь получит тот же результат;

2) переменными в данном временном интервале — в одно время в этом интервале исследователь обнаруживает один состав, а в другое — другой, поскольку одни элементы могут исчезать, а другие появляться вновь; число элементов класса может меняться со временем; переменными вообще — в любом временно́м интервале.

3) возможны самые разнообразные комбинации того, о чем говорилось в 1 и 2; например, одни элементы данного класса исчезают со временем, новые появляются, и число элементов растет.

От различения конечных и бесконечных классов отличается различение ограниченных и неограниченных классов. Класс может быть задан так, что число его элементов будет бесконечным, но ограниченным в том смысле, что со временем не будут появляться новые его элементы. С другой стороны, мы можем ничем не ограничивать число элементов класса, но оно будет конечным.

## § 12. Функция

*D*1. Индивиду $t^1$ соответствует класс $Kt^2$, если и только если индивиду $t^1$ соответствует каждый из элементов класса $Kt^2$.

*D*2. Классу $Kt^2$ соответствует индивид $t^1$, если и только если любому (каждому) элементу класса $Kt^2$ соответствует индивид $t^1$.

*D*3. Классу $Kt^1$ соответствует класс $Kt^2$, если и только если каждому элементу класса $Kt^1$ соответствует некоторый непустой подкласс класса $Kt^2$.

*D*4. Если найден способ, с помощью которого для каждого индивида класса $Kt^1$ можно установить, какой именно подкласс класса $Kt^2$ ему соответствует, то будем говорить, что задан (установлен, известен и т. п.) тип (вид, способ) соответствия класса $Kt^2$ классу $Kt^1$ или что задана функция $t^2$ от $t^1$. Будем использовать для этого символ

$$t^2 \Leftarrow f(t^1),$$

где $f$ обозначает сам способ соответствия.

*D*5. Индивиды из области значения $t^1$ суть аргументы, а индивиды из области значения $t^2$ — функционалы данной функции.

*D*6. $Kt^1$ есть область определения $t^2 \Leftarrow f(t^1)$, а $Kt^2$ — область ее значения.

*D*7. Реализацией $t^2 \Leftarrow f(t^1)$ будем называть отыскание функционалов $t^{i1}, \ldots, t^{im}$ $(m \geqslant 1)$ для данного аргумента $t^k$.

Обозначим ее символом

$$(t^2 = t^{i1}, \ldots, t^{im}) \Leftarrow f\,(t^1 = t^k).$$

*D*8. Две функции $t^2 \Leftarrow f^1(t^1)$ и $t^4 \Leftarrow f^2(t^3)$ тождественны, если и только если

1) $Kt^1 \subset \supset Kt^3$

2) $Kt^2 \subset \supset Kt^4$

3) для каждого аргумента $t^k$

$$(t^2 = t^{i1}, \ldots, t^{im}) \Leftarrow f^1 (t^1 = t^k)$$

$$(t^4 = t^{i1}, \ldots, t^{im}) \Leftarrow f^2 (t^3 = t^k).$$

В противном случае они различны.

$D9$. Функция $t^1 \Leftarrow f^1(t^2)$ называется обратной по отношению к $t^2 \Leftarrow f^2(t^1)$.

Если заданы $Kt^1$ и $Kt^2$, то характер (вид) $f$ определяется свойствами этих классов и задачей исследования. В частности, вид $f$ может зависеть от определений, от результатов наблюдений и т. д. При этом обращаем внимание на следующее: само соглашение $t^2 \Leftarrow f(t^1)$ означает лишь то, что указано в $D4$; причины же, заставившие принять его, в нем самом не усматриваются; и в этом смысле оно не есть высказывание о какой-то эмпирической связи предметов или о логической связи терминов. Это — самостоятельная логическая форма. В частности, мы можем устанавливать функции, где аргументами являются временны́е или пространственные интервалы, которые сами по себе не являются причинами событий или посылками умозаключений.

В случае $t^1 \Leftarrow f(t^2)$ термины $t^1$ и $t^2$ могут быть энками из двух и более терминов. Обращаем внимание на то, что эти термины не зависят друг от друга по смыслу; аналогично не зависят друг от друга по смыслу индивидуальные термины из области их значения.

Высказывания, фиксирующие функции, суть высказывания с многоместными предикатами. И к ним относится все, сказанное о таких высказываниях. Но они имеют и свои особенности, обусловленные свойствами их предикатов (т. е. типов функции).

## § 18. Функции с высказываниями

Пусть $X^1, \ldots, X^n, Y$ суть какие-то высказывания, а $\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n, \downarrow Y$ суть соответствующие термины. Пусть $\downarrow X^1_i \in K \downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n_i \in K \downarrow X^n, \downarrow Y_i \in K \downarrow Y$. Если задана функция

$$\downarrow Y \Leftarrow f(\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n),$$

то выражение вида

$$\downarrow Y_i \Leftarrow f(\downarrow X^1_i, \ldots, \downarrow X^n_i)$$

есть ее реализация. Для высказываний о таких функциях имеет силу утверждение:

$$A1.\ (\downarrow Y \Leftarrow f(\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n)) \cdot X_i^1 \cdot \ldots \cdot X_i^n \rightarrow Y_i$$

## § 14. Определения

В науке широко распространены определения, имеющие вид

$$[Q\gamma^k\gamma_k] \Leftarrow f([P^1\gamma^1\gamma_1], \ldots, [P^n\gamma^n\gamma_n])$$

$$[s^* \leftarrow Q\gamma^k\gamma_k] \Leftarrow f([s^* \leftarrow P^1\gamma^1\gamma_1], \ldots, [s^* \leftarrow P^n\gamma^n\gamma_n]),$$

где $Q\gamma^k\gamma_k$ суть вновь вводимые термины, и

$$[\gamma^k] \Leftarrow f([\gamma^1], \ldots, [\gamma^n]).$$

Для таких определений имеет силу утверждение:

$A1.$ $([P_1] \Leftarrow f([P_2], \ldots, [P_n])) \leftrightarrow ([s^* \leftarrow P_1] \Leftarrow f([s^* \leftarrow P_2], \ldots$
$\ldots, [s^* \leftarrow P_n])$

Обычно предикаты $Q\gamma^k\gamma_k$ расщепляются на части, и приведенные определения выступают как определения $Q$ и $\gamma_k$ (например, выражения «Скорость», «Мощность», «Кгм», «Км/час» и т. п. рассматриваются как самостоятельные единицы языка науки). Однако выражения $Q$ и $\gamma_k$ имеют смысл (и выступают в роли самостоятельных знаков) лишь постольку, поскольку неявно предполагается, что они суть части $Q\gamma^k\gamma_k$.

## § 15. Модели

Пусть требуется исследовать предметы некоторого класса $Kt^1$ (это может быть и индивидуальный предмет), т. е. требуется получить какие-то высказывания об этих предметах, удовлетворяющие определенным требованиям. Эта задача может быть решена двояко:

1) исследуются сами представители этого класса предметов (сам этот предмет) $Kt^1$;

2) подбираются (или создаются, в частности) какие-то другие предметы класса $Kt^2$, которые исследуются вместо предметов $Kt^1$, и затем из высказываний, полученных здесь, получаются по определенным правилам высказывания, относящиеся к предметам $Kt^1$.

$D1$. Предметы $Kt^1$ суть предметы-оригиналы относительно предметов $Kt^2$, а предметы $Kt^2$ суть предметы-модели относительно предметов $Kt^1$.

Предметы-модели подбираются так, чтобы имели место функции

$$\downarrow Y^1 \Leftarrow f^1(\downarrow X^1),\ \ldots, \downarrow Y^n \Leftarrow f^n(\downarrow X^n),$$

где $X^1, \ldots, X^n$ суть высказывания, получаемые при исследовании моделей, а $Y^1, \ldots, Y^n$ суть высказывания, относящиеся к предметам-оригиналам и удовлетворяющие некоторым заранее принятым требованиям. Функции $f^1, \ldots, f^n$ суть правила замены терминов, относящихся к предметам-моделям, на термины, относящиеся к предметам-оригиналам. Получение $Y^i$ из $X^i$ по этим правилам ничего общего не имеет с умозаключением по аналогии, поскольку здесь модели специально подбираются так, чтобы эти правила имели силу. Очевидно, о предметах-оригиналах и предметах-моделях должны иметься какие-то предварительные знания, чтобы была априорная уверенность в возможности получения и пригодности $Y^1, \ldots, Y^n$. Встречающиеся в таких случаях неудачи не меняют существа дела.

# ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРАМИ

## § 1. Кванторы

Обычно под кванторами имеют в виду знаки «все» и «некоторые», употребляемые в высказываниях совместно с их терминами. Мы здесь в число кванторов будем включать также знаки «ноль», «один», «два», ..., «бесконечное число» и т. п. и производные от них знаки («большинство», «меньшинство», «половина», «третья часть» и т. п.).

Кванторы не являются терминами высказываний и даже частями терминов, хотя слова «один», «два» и т. п. могут быть терминами и частями терминов. Например, в высказывании «Три типа современных самолетов развивают скорость более трех тысяч километров в час» слово «три» в первом случае есть квантор, а во втором — часть предиката. Таким образом кванторы суть не просто слова вида «один», «два», «все» и т. п., но суть определенные функции знаков такого рода.

Примем обозначения:

1) $\text{Ꙗ}$ — любой квантор;
2) $\text{Ꙗ}t$ — $\text{Ꙗ}$ элементов $Kt$;
3) $\urcorner \text{Ꙗ}t$ — не $\text{Ꙗ}$ элементов $Kt$;
4) $?\text{Ꙗ}t$ — невозможно установить, $\text{Ꙗ}t$ или $\urcorner \text{Ꙗ}t$.

В логике подробно исследуют свойства кванторов «все» («каждый») и «некоторые» («по крайней мере один»). Будем их обозначать символами соответственно $\forall$ и $\exists$.

## § 2. Структура высказываний с кванторами

Вопрос о способе изображения высказываний в логике имеет принципиальное значение, поскольку он есть вопрос о способе их логической стандартизации, т. е. вопрос об их структуре. На примере высказываний с кванторами это обнаруживается достаточно отчетливо.

В естественных (обычных и научных) языках кванторы часто ставятся непосредственно перед терминами высказываний. Так, например, обстоит дело в высказывании «Все $a$ больше некоторых $b$». Но в логике принято кванторы выносить из высказываний и записывать рядом с высказываниями, указывая при этом также те термины, к которым относятся кванторы. Так, если $X$ есть высказывание, $t$ — термин, а $\alpha$ означает, что перед $\text{Ӈ}$ имеется или нет какой-то из знаков $\urcorner$ и ?, то высказывание, содержащее $\alpha\text{Ӈ}$, запишется в виде $(\alpha\text{Ӈ}t)X$. Удобство этого способа изображения очевидно: можно рассматривать высказывания с любой структурой (т. е. отвлекаются от структуры $X$), формулируя правила для высказываний с кванторами в предельно обобщенной форме.

Но дело не только в этом. Запись кванторов непосредственно перед терминами имеет один крупный недостаток: высказывания с двумя и более кванторами в некоторых случаях допускают различные по смыслу толкования. Так, высказывание «Все $a$ больше некоторых $b$» можно толковать как «Для каждого $a$ найдется такой $b$, что $a$ больше $b$» и как «Некоторые $b$ таковы, что все $a$ больше их». Эти толкования не тождественны по смыслу (из второго высказывания не следует первое; второе может быть истинно, а первое при этом может быть ложно). Такого рода факты говорят о том, что при построении высказываний с двумя и более кванторами важно не только то, какие кванторы и перед какими терминами проставляются, но и то, в какой последовательности это делается (т. е. в каком порядке приписываются кванторы). А порядок приписывания кванторов может и не совпадать с порядком терминов в высказывании. Различный порядок приписывания кванторов может означать различные по смыслу высказывания, полученные в различных актах исследования. Принятый в логике способ изображения высказываний с кванторами это учитывает посредством последовательной записи кванторов с соответствующими терминами. Будучи рекомендован наукам в качестве некоторого стандартного образца, он способствует устранению двусмысленностей из языка науки.

Выше уже говорилось о том, что одни и те же знаки могут играть роль кванторов и частей терминов. Логическая стандартизация высказываний позволяет точно установить, какую именно роль выполняет тот или иной знак, Возьмем, например, высказывание «Два атома водорода и один атом кислорода образуют молекулу воды». Представим это высказывание в стандартной форме: «Два атома водорода и один атом кислорода таковы, что атом водорода и атом кислорода образуют молекулу воды». Очевидно, мы получили ложное высказывание, приняв слова «один» и «два» за кванторы, каковыми они на самом деле не являются.

Наконец, принятый в логике способ изображения высказываний с кванторами делает более явными логические свойства этих высказываний, что точно также играет немаловажную роль в науке. Как видим, даже в таком казалось бы сугубо второстепенном деле, как отыскание удобной формы записи, логика вольно или невольно работает над усовершенствованием языка науки.

Мы будем пользоваться принятой в логике символикой, внеся в нее, однако, некоторые коррективы. Включение квантора в высказывание $X$ осуществляется по такой схеме:

1) по правилам трансформации из $X$ получаем $t \leftarrow PX$;

2) в зависимости от результатов исследования к термину $t$ приписывается $\alpha\text{Ӈ}$; получается $\alpha\text{Ӈ}t \leftarrow PX$, которое читается как «$\alpha\text{Ӈ}$ элементов класса $t$ таковы, что $X$» или просто «$\alpha\text{Ӈ}t$ таковы, что $X$» (читают так же как «$X$ истинно в отношении $\alpha\text{Ӈ}$ элементов $Kt$» или просто «$X$ истинно в отношении $\alpha\text{Ӈ}t$»).

Теперь, приняв запись

$$\alpha\text{Ӈ}t \leftarrow PX$$

за первично ясную, примем соглашения, играющие чисто формальную роль:

$A\,1.$ $(\alpha\text{Ӈ}t)(t \leftarrow PX) \equiv \alpha\text{Ӈ}t \leftarrow PX$

$A\,2.$ $(\alpha\text{Ӈ}t)\,X \equiv (\alpha\text{Ӈ}t)(t \leftarrow PX)$.

Пусть $\text{Ӈ}^1, \text{Ӈ}^2, \ldots$ каждый по отдельности есть любой квантор; если же они встречаются совместно (в одном утверждении), то различие индексов означает лишь то, что кванторы могут быть попарно различны и тождественны в любых возможных комбинациях. Пусть, далее, каждый из знаков $\alpha^1$, $\alpha^2, \ldots$ перед квантором означает по отдельности, что перед этим квантором стоит какой-то (любой) из знаков $\urcorner$ и $?$ или эти знаки отсутствуют; если же $\alpha^1$, $\alpha^2$,... встречаются совместно (в одном утверждении), то различие индексов означает лишь то, что знаки перед кванторами могут быть различны и тождественны (и отсутствовать) в любых комбинациях. Высказывания с несколькими кванторами будут записываться в форме

$$(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,((\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\,X)$$
$$(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,((\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\ldots((\alpha^n \mathrm{Ч}^n t^n)\,X)\ldots).$$

В силу принятых соглашений они будут читаться как

$$\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1 \leftarrow P\,(\alpha^2 K^2 t^2 \leftarrow PX)$$
$$\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1 \leftarrow P\,(\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2 \leftarrow P\,(\ldots \leftarrow P\,(\alpha^n \mathrm{Ч}^n t^n \leftarrow PX)\ldots).$$

Для упрощения записи примем:

*А* 3. $(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,(\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\,X \equiv (\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,((\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\,X)$.

Из *А* 3 следует:

*Т* 1. $(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,(\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\ldots(\alpha^n \mathrm{Ч}^n t^n)\,X \equiv (\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\,((\alpha^2 \mathrm{Ч}^2 t^2)\ldots$
$\ldots((\alpha^n \mathrm{Ч}^n t^n)\,X)\ldots)$.

Если $Y$ есть $(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)X$ или $(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\ldots(\alpha^n \mathrm{K}^n t^n)X$, где $n \geqslant 2$, и при этом $X$ не содержит кванторов, будем называть $X$ бескванторной основой высказывания $Y$, а $\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1$ и $(\alpha^1 \mathrm{Ч}^1 t^1)\ldots(\alpha^n \mathrm{Ч}^n t^n)$ — кванторной группой (или приставкой) $Y$. Если в $Y$ нет кванторов, будем говорить, что оно имеет пустую кванторную группу.

## § 3. Определение высказывания

К определению высказывания теперь можно добавить пункт, касающийся кванторов. Определение будет иметь такой вид ($D_1$):

1) структурно простые высказывания суть высказывания $s\alpha \leftarrow E$ и $s\alpha \leftarrow P$;

2) если $X$ есть высказывание, то $\sim X$ есть высказывание;

3) если $X^1,\ldots X^n$ суть высказывания, то $X^1\cdot\ldots\cdot X^n$ и $X^1:\ldots:X^n$ суть высказывания;

4) если $X$ есть высказывание, то $(\alpha \mathrm{Ч} t)X$ есть высказывание;

5) если по соглашению $X \equiv Y$, и $Y$ есть высказывание, то $X$ есть высказывание.

Примем также следующее дополнение к определению вхождений ($D\ 2$):

1) $s$ входит в $sa \leftarrow P$ и $sa \leftarrow E$;

2) $P$ входит в $sa \leftarrow P$, $E$ входит в $sa \leftarrow E$;

3) если $t$ входит в $X$, а $X$ входит в $Y$, то $t$ входит в $Y$;

4) $\alpha\curlyvee t$ входит в $(\alpha\curlyvee t)\ X$; $t$ входит в $\alpha\curlyvee t$;

5) $X$ входит в $(\alpha\curlyvee t)X$;

6) если $\alpha\curlyvee t$ входит в $X$, а $X$ входит в $Y$, то $\alpha\curlyvee t$ входит в $Y$.

$D\ 3$. Если $t$ входит в $X$, то $t$ связан (связанно входит) в $(\alpha\curlyvee t)X$; если $t$ входит связанно в $X$, а $X$ входит в $Y$, то $Y$ имеет связанное вхождение $t$.

$D\ 4$. Если $t$ входит в $X$, а $\alpha\curlyvee t$ — нет, то $t$ свободно входит в $X$; если $t$ свободен в $X$, а $X$ входит в $Y$, то $Y$ имеет свободное вхождение $t$.

## § 4. Неопределенность

Пусть $(\forall s)X$ нельзя доказать и опровергнуть, а перебрать все S невозможно (потому, что, например, $Ks$ бесконечен). Пусть все рассмотренные S таковы, что $X$. И как бы велико ни было число рассмотренных случаев, в данных условиях нет логических оснований признать $(\forall s)X$ и $(\neg\forall s)X$. Это положение можно зафиксировать с помощью знака неопределенности, т. е. приняв $(?\forall s)X$. И если в науке часто в таких случаях все же принимают $(\forall s)X$, то делают это не из логических, а из других соображений (например, рассмотрено достаточно большое число предметов; высказывание принимается как гипотеза, подтверждаемая следствиями; и т. п.). Таким образом, учитывать возможность случаев со знаком неопределенности перед кванторами есть дело вполне правомерное в логическом исследовании языка науки. При этом неопределенность квантора отлична от неопределенности, которая может иметь место в основе. Более того, эти неопределенности совершенно независимы.

## § 5. Квантификация терминов

Построение высказывания, в основу которого входит термин $t$, а в кванторную группу входит $\alpha\curlyvee t$, есть квантификация термина $t$.

В науке обычным делом является квантификация терминов — субъектов. С исследования ее начала свое существование логика как особая наука (аристотелевская силлогистика). Что касается квантификации предикатов, то по ряду причин она на первый взгляд кажется чем-то надуманным, противоестественным. Не случайно поэтому она стала предметом внимания логики лишь в Новое время.

Причины, о которых говорилось, суть следующие. Признаки чаще всего не различаются по видам и не квантуются (не расчленяются на части), так что для применения кванторов к ним просто нет условий: кванторы употребляются лишь в тех случаях, когда приходится иметь дело с классами. Если же такие условия есть, и квантификация предикатов осуществляется, то фиксируемые ими признаки берутся как предметы наряду с предметами, фиксируемыми субъектами. Так что приходится иметь дело с классами предметов, которые могут быть признаками других предметов. Например, в высказывании «$a$ имеет некоторые степени свободы» степени свободы рассматриваются как предметы, различающиеся по видам. Если $P$ — предикат высказывания $X$, то при квантификации он становится одним из субъектов, а предикатом во вновь получаемом высказывании становится выражение вроде «второй (или первый, в зависимости от места $P$) есть признак первого (первых; или, соответственно, второго; вторых)». Так, при квантификации предиката в $s \leftarrow P$ получится высказывание с основой $(s,P) \leftarrow Q$, где $Q$ есть выражение «второй есть признак первого».

Наконец, если признаки различаются по видам, то квантификация предикатов осуществляется неявно или в принципе может быть всегда осуществлена. Так, имеют силу утверждения (если $P$ не есть $P^*$ или $P^*\alpha \downarrow s^i$):

$$(s \leftarrow P) \rightarrow (\exists P)\,(s \leftarrow P);$$

$$(s \urcorner \leftarrow P) \rightarrow (\forall P)\,(s \urcorner \leftarrow P);$$

$$(s? \leftarrow P) \rightarrow (\forall P)\,(s? \leftarrow P).$$

Они (совместно с другими правилами для кванторов) позволяют всякие высказывания рассматривать как высказывания с неявно квантифицированными предикатами.

Поскольку все, что верно для квантификации субъектов, верно и для квантификации предикатов (но не всегда наоборот!) мы в дальнейшем будем говорить о квантификации любых терминов.

Особый интерес представляют случаи, когда осуществляется квантификация частей терминов. Это имеет место, например, в высказываниях

$$(\alpha \text{ꓘ} P)((s\beta \downarrow P)\gamma \leftarrow Q)$$
$$(\alpha \text{ꓘ} P)((s\beta \downarrow P)\gamma \leftarrow E),$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ означают наличие или отсутствие $\urcorner$ и ? в какой-то комбинации. Все случаи такого рода в конце концов сводятся к случаям квантификации «полных» терминов посредством соответствующих правил для сложных терминов. Например, из

$$(\forall P)(s \downarrow P \leftarrow Q)$$

получается высказывание

$$(\forall P)((s \leftarrow P) \rightarrow (s \leftarrow Q)).$$

## § 6. Внешнее отрицание

Для высказываний $(\alpha \text{ꓘ} s)$ $(s\beta \leftarrow E)$ внешнее отрицание определяется утверждениями:

*A* 1. $\sim (\alpha^1 \text{ꓘ} s)(s\beta \rightarrow E) \equiv (\alpha^2 \text{ꓘ} s)(s\beta \leftarrow E) : (\alpha^3 \text{ꓘ} s)(s\beta \leftarrow E),$

де $\alpha^1 \text{ꓘ}$, $\alpha^2 \text{ꓘ}$ и $\alpha^3 \text{ꓘ}$ различаются как $\text{ꓘ}$, $\urcorner \text{ꓘ}$ и $?\text{ꓘ}$ (в любых перестановках).

Если в $X$ не входит $E$, то внешнее отрицание $(\alpha \text{ꓘ} t)X$ определяется утверждениями:

*A* 2. $\sim (\alpha^1 \text{ꓘ} t)\, X \equiv \sim (t \leftarrow E) : (\alpha^2 \text{ꓘ} t)\, X : (a^3 \text{ꓘ} t)\, X,$

где $\alpha^1$, $\alpha^2$ и $\alpha^3$ те же, что и в *A*1.

Классический случай, когда

$$\sim (\text{ꓘ} t)\, X \equiv (\urcorner\, \text{ꓘ} t)\, X$$
$$\sim (\urcorner\, \text{ꓘ} t)\, X \equiv (\text{ꓘ} t)\, X$$

имеет место лишь тогда, когда исключается возможность $?\text{ꓘ}$ и имеются в виду экзистенциальные классы. Таким образом, утверждения

$$\sim (\urcorner\, \text{ꓘ} t)\, X \vdash (\text{ꓘ} t)\, X$$

и в том числе —

$$\sim (\urcorner\, \forall t)\, X \vdash (\forall t)\, X$$
$$\sim (\urcorner\, \exists t)\, X \vdash (\exists t)\, X$$

в общем (неклассическом) случае неверны. Они верны лишь для классического случая. Если они принимаются, то это равносильно исключению неопределенности кванторов и признанию экзистенциальности классов.

## § 7. Определения кванторов

Пусть

$$t1,\ t2, \ldots\ t\text{A}$$

суть всевозможные индивидуальные термины из области значения $t$, а число А есть мощность $Kt$. Число А может быть бесконечно, но это не должно смущать: речь будет идти не о получении истинных высказываний с кванторами, а лишь об определении смысла последних. Каждый $ti$ по отдельности есть какой-то (безразлично, какой) индивидуальный термин из области значения $t$, а различие совместно взятых $ti$ обозначает лишь то, что эти термины различны по значению.

Символом

$$Xi$$

будем обозначать высказывание, образованное из $X$ путем подстановки $ti$ на место $t$ везде, где $t$ входит в $X$. Пусть $t$ не входит в связанном виде в $X$ и является единственным свободным в $X$ термином.

Обычно кванторы $\forall$ и $\exists$ определяют так:

$$(\forall t)\, X \equiv X1 \cdot \ldots \cdot X\text{A}$$
$$(\exists t)\, X \equiv X1 \vee \ldots \vee X\text{A}.$$

Эти определения правомерны, поскольку А конечно и не учитывается возможность неопределенности. Если же А бесконечно (или даже достаточно велико, практически бесконечно, не ограничено и т. д.), то в определяющей части нужно иметь в виду не сами $Xi$, а лишь допускаемую возможность их построения. Но в таком случае надо считаться со случаями, когда не для всех индивидов из области значения квантифицируемого термина возможно построение таких высказываний, т. е. с неопределенностью для кванторов. А если последнюю признать возможной, то приведенные определения окажутся противоречивыми. В самом деле, верны утверждения:

$$(?\,\forall\, t)\, X \vdash \sim (\forall\, t)\, X \cdot \sim (\urcorner\, \forall\, t)\, X$$

$$(\urcorner \forall t) X \dashv\vdash (\exists t) \sim X$$
$$\sim (\sim X1 \vee \ldots \vee \sim X \mathrm{A}) \vdash X1 \cdot \ldots \cdot X \mathrm{A}.$$

Из них получаем

$$(? \forall t) X \vdash \sim (X1 \cdot \ldots \cdot X \mathrm{A}) \cdot (X1 \cdot \ldots \cdot X \mathrm{A}).$$

Аналогично получаем

$$(? \exists t) X \vdash \sim (X1 \vee \ldots \vee X \mathrm{A}) \cdot (X1 \vee \ldots \vee X \mathrm{A}).$$

Чтобы избежать этого, надо либо отказаться от допущения неопределенности кванторов, либо в их определения внести какие-то уточнения

Примем обозначения:

1) $\{Y\}$ — возможно построить истинное $Y$;

2) $\{\overline{Y}\}$ — невозможно построить истинное $Y$.

Говоря о том, что невозможно построить $Y$, мы указываем $Y$, т. е. строим его. Но ничего парадоксального здесь нет: напоминаем, что мы постоянно имеем в виду некоего Исследователя, а не самих себя.

Примем следующие утверждения, определяющие смысл кванторов:

$A$ 1. $(\exists t) X \equiv \{X1 \cdot \ldots \cdot X n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant \mathrm{A})$

$(\urcorner \exists t) X \equiv \{\sim X1 \cdot \ldots \cdot \sim X \mathrm{A}\}$

$(? \exists t) X \equiv \overline{\{\sim X1 \cdot \ldots \cdot \sim X \mathrm{A}\}} \cdot (\{\overline{X}_1\} : \{\sim X_1\}) \cdot$

$\ldots \cdot (\{\overline{X\mathrm{A}}\} : \{\sim X \mathrm{A}\})$

$A$ 2. $(\forall t) X \equiv \{X1 \cdot \ldots \cdot X \mathrm{A}\}$

$(\urcorner \forall t) X \equiv \{\sim X1 \cdot \ldots \cdot \sim X n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant \mathrm{A})$

$(? \forall t) X \equiv \overline{\{X1 \cdot \ldots \cdot X \mathrm{A}\}} \cdot (\{\sim \overline{X1}\} : \{X1\}) \cdot \ldots \cdot$

$\cdot (\{\sim \overline{X} \mathrm{A}\} : \{X \mathrm{A}\})$.

Возможны другие варианты, в частности — такие. Вариант I: принимается *А 2*, а вместо *А 1* принимается

$A'$1. $(\exists t) X \equiv (\urcorner \forall t) \sim X$

$(\urcorner \exists t) X \equiv (\forall t) \sim X$

$(? \exists t) X \equiv (? \forall t) \sim X$.

Вариант II: принимается *A 1*, а вместо *A 2* принимается

$$A'2.\ (\forall t)X \equiv (\neg \exists t) \sim X$$
$$(\neg \forall t)\, X \equiv (\exists t) \sim X$$
$$(?\, \forall t)\, X \equiv (?\, \exists t) \sim X.$$

Соотношения, указанные в *A'1* и *A'2* получаются из *A1* и *A2* посредством замены $\sim \sim Xi$ на $Xi$.

Определения $(\exists t)X$ и $(\neg \forall t)X$ можно записать соответственно в форме

$$(\exists t)\, X \equiv \{X_1\}$$
$$(\neg \forall t)\, X \equiv \{\sim X_1\}$$

или в форме

$$(\exists t)\, X \equiv \{X1 \vee \ldots \vee X\,\mathrm{A}\}$$
$$(\neg \forall t)\, X \equiv \{\sim X1 \vee \ldots \vee \sim X\,\mathrm{A}\}.$$

Квантор «Некоторые и только некоторые» (обозначим его $\exists^0$) определяется утверждением:

$$A\,3.\ (\exists^0 t)\, X \equiv (\exists t)\, X \cdot (\neg \forall t)\, X$$
$$(\neg \exists^0 t)\, X \equiv (\forall t)\, X$$
$$(?\, \exists^0 t)\, X \equiv (\exists t)\, X \cdot (?\, \forall t)\, X.$$

Очевидно,

$$T\,1.\ (\alpha\, \exists^0 t)\, X \vdash (\exists t)\, X.$$

Цель определения кванторов — анализ той интуитивной основы, на которой строится теория логического следования для высказываний с кванторами (т. е. анализ источников формирования правил логического следования для этих высказываний). В частности, приняв утверждения *A**:

1) $(X \vdash Y) \rightarrow (\{X\} \vdash \{Y\})$
2) $(X \vdash Y) \rightarrow (\{\overline{Y}\} \vdash \{\overline{X}\})$,

мы из *A1* и *A2* легко получим такие следствия:

$$T\,2.\ (\forall t)\, X \vdash (\exists t)\, X$$
$$T\,3.\ (\neg \exists t)\, X \vdash (\neg \forall t)\, X$$
$$T\,4.\ (\forall t)\, X \vdash (\neg \exists t) \sim X$$
$$T\,5.\ (\neg \forall t) X \vdash (\exists t) \sim X$$
$$T\,6.\ (?\, \forall t)\, X \vdash (?\, \exists t) \sim X.$$

## § 8. Другие кванторы

Пусть $N$ есть любое натуральное число. Возможны такие определения $\alpha \mathrm{N} t$ (они не единственно возможные):

$A$ 1. $(\mathrm{N}\, t)\, X \equiv \{X1 \cdot \ldots \cdot X\mathrm{N}\}$

$A$ 2. $(\neg\, \mathrm{N}\, t)\, X \equiv \{\sim X1 \cdot \ldots \cdot \sim X(\mathrm{A} - \mathrm{N} + 1)\}$

$A$ 3. $(?\, \mathrm{N}\, t)\, X \equiv \{\overline{X1 \cdot \ldots \cdot X\,\mathrm{N}}\} \cdot \{\overline{\sim X1 \cdot \ldots}$
$\overline{\ldots \cdot \sim X(\mathrm{A} - \mathrm{N} + 1}\}$

В силу $A^*$ из предшествующего параграфа получаем:

$T$ 1. $((\mathrm{N} + 1)\, t)\, X \vdash (\mathrm{N}\, t)\, X$

$T$ 2. $(\neg\, \mathrm{N}\, t)\, X \vdash (\neg\, (\mathrm{N} + 1)\, t)\, X$

$T$ 3. $(?\, \mathrm{N}\, t)\, X \vdash (?(\mathrm{N} + 1)\, t)\, X.$

В $A\ 1 - A3$ квантор N определяется в смысле «По крайней мере N». Ограничительное определение («N и только N»; обозначим его $\mathrm{N}^0$) имеет такой вид:

$A$ 4. $(\mathrm{N}^0 t)\, X \equiv (\mathrm{N}\, t)\, X \cdot (\neg\, (\mathrm{N} + 1)\, t)\, X$
$(\neg\, \mathrm{N}^0 t)\, X \equiv (\mathrm{N}\, t)\, X \cdot ((\mathrm{N} + 1)\, t)\, X$
$(?\, \mathrm{N}^0 t)\, X \equiv (\mathrm{N}\, t)\, X \cdot (?\, (\mathrm{N} + 1)\, t)\, X.$

Очевидно,

$T$ 5. $(\alpha\, \mathrm{N}^0 t)\, X \vdash (\mathrm{N}\, t)\, X.$

Только в случае $(\mathrm{N}^0 t)X$ квантор $N$ совпадает с числом элементов класса $t$ таких, что $X$, т. е. $K(t \downarrow PX)$.

Квантор «ноль» определяется утверждением:

$A$ 5. $(\mathrm{O}\, t)\, X \equiv (\neg\, 1\, t)\, X.$
$(\neg\, \mathrm{O}\, t)\, X \equiv (1\, t)\, X$
$(?\, \mathrm{O}\, t)\, X \equiv (?\, 1\, t)\, X.$

Если $(N^1 t)X$ и $(\mathrm{N}^2 t)X$, то в зависимости от соотношений $\mathrm{N}^1$, $\mathrm{N}^2$ и A вводятся такие кванторы, как «большинство», «меньшинство», «третья часть», «почти все» и т. п.

## § 9. Несколько кванторов

Уточним подстановку $X(t^1/t^2)$, приняв следующие утверждения:

$A$ 1. $(X\,(t^1/t^2))\,(t^3/t^4) \equiv (X\,(t^3/t^4))\,(t^1/t^2)$

A 2. $(X(t^1/t^2))(t^3/t^4) \equiv (X(t^1,\ t^3/t^2,\ t^4)$
$(\ldots(X(t^1/t^2))(t^3/t^4))\ldots)(t^k/t^{k+1}) \equiv (X(t^1,\ t^3,\ldots,$
$t^k/t^2,\ t^4,\ldots,\ t^{k+1})$

A 3. $(X^1\cdot\ldots\cdot X^n)(t^1/t^2) \equiv X^1(t^1/t^2)\cdot\ldots\cdot X^n(t^1/t^2)$

A 4. $(X^1:\ldots:X^n)(t^1/t^2) \equiv X^1(t^1/t^2):\ldots:X^n(t^1/t^2)$

A 5. $\sim(X(t^1/t^2)) \equiv (\sim X)(t^1/t^2)$

A 6. $\{X(t^1/t^2)\} \equiv \{X\}(t^1/t^2)$
$\{\overline{X(t^1/t^2)}\} \equiv \{\overline{X}\}(t^1/t^2)$

A 7. $(X \equiv Y) \rightarrow (X(t^1/t^2) \equiv Y(t^1/t^2))$.

A 8. Если $t^1$ не входит в $X$, то $X(t^1/t^2) \equiv X$.

A 9. $X(t/t) \equiv X$.

Эти утверждения касаются исключительно удобств нашего языка.

Теперь для получения утверждений, относящихся к случаям двух и более кванторов, достаточно ранее принятых утверждений

$$X \dashv\vdash (t \leftarrow P\, X)$$

$$\sim(t \leftarrow P\, X) \dashv\vdash (t \leftarrow P \sim X)$$

$$(\alpha^1 \rotatebox[origin=c]{180}{Ч}^1 t^1)(\alpha^2 \rotatebox[origin=c]{180}{Ч}^2 t^2)\, X \equiv (\alpha^1 \rotatebox[origin=c]{180}{Ч}^1 t^1)((\alpha^1 \rotatebox[origin=c]{180}{Ч}^2 t^2)\, X)$$

и определений кванторов.

T 1. $(\rotatebox[origin=c]{180}{Ч}\, t)(\rotatebox[origin=c]{180}{Ч}\, t)\, X \equiv (\rotatebox[origin=c]{180}{Ч}\, t)\, X$

T 2. $(\exists t^1)(\exists t^2)\, X \dashv\vdash (\exists t^2)(\exists t^1)\, X$

T 3. $(\forall t^1)(\forall t^2)\, X \dashv\vdash (\forall t^2)(\forall t^1)\, X$

T 4. $(\exists t^1)(\forall t^2)\, X \vdash (\forall t^2)(\exists t^1)\, X$

T 5. $(\exists t^1)(\exists t^2)\, X \vdash (\exists(t^1, t^2))\, X$

T 6. $(\forall t^1)(\forall t^2)\, X \vdash (\forall(t^1, t^2))\, X$

T 7. $(\forall t^1)(\exists t^2)\, X \vdash (\exists(t^1, t^2))\, X$

T 8. $(\exists t^1)(\forall t^2)\, X \vdash (\exists(t^1, t^2))\, X$

T 9. $(\exists t^1)(?\,\exists t^2)\, X \vdash (?\,\exists(t^1, t^2))\, X$

T 10. $(?\,\exists t^1)(\exists t^2)\, X \vdash (?\,\exists(t^1, t^2))\, X$

T 11. $(\forall t^1)(?\,\exists t^2)\, X \vdash (?\,\exists(t^1, t^2))\, X$

T 12. $(?\,\exists t^1)(\forall t^2)\, X \vdash (?\,\exists(t^1, t^2))\, X$

T 13. $(\forall t^1)(?\,\forall t^2)\, X \vdash (?\,\forall(t^1, t^2))\, X$

T 14. $(?\,\forall t^1)(\forall t^2)\, X \vdash (?\,\forall(t^1, t^2))\, X$

$T\ 15.\ (?\,\forall\, t^1)\,(?\forall\, t^2)\, X \vdash (?\,\forall\,(t^1, t^2))\, X$

$T\ 16.\ (\exists\, t^1)\,(\neg\exists t^2)\, X \vdash (\exists\,(t^1, t^2)) \sim X.$

Утверждение

$$(\forall\, t^1)\,(\exists\, t^2)\, X \vdash (\exists\, t^2)\,(\forall\, t^1)\, X$$

верно лишь в том случае, если мощность $Kt^2$ равна единице. В общем же случае оно неверно. Пусть, например, в $Kt^2$ включается по крайней мере два индивида $t^2 1$ и $t^2 2$. Может случиться так, что

$$(\forall\, t^1)\,(\exists\, t^2)\, X \equiv (X\,(t^2/t^2 1))\,(t^1/t^1 1)\cdot\ldots\cdot(X\,(t^2/t^2 2))\,(t^1/t^1 \mathrm{A}),$$

откуда получить $(\exists t^2)$ $(\forall t^1)X$ невозможно (в первой подстановке фигурирует $t^2 1$, а в последней — $t^2 2$).

В классической логике имеют силу правила

$$\sim ((\forall\, t^1)\,(\forall\, t^2)\, X) \vdash (\exists\, t^1)\,(\exists\, t^2) \sim X$$

$$\sim ((\exists\, t^1)\,(\forall\, t^2)\, X) \vdash (\forall\, t^1)\,(\exists\, t^2) \sim X$$

и т. п. У нас такие утверждения сохраняют силу лишь для классических случаев (без неопределенностей). В общем же они неверны. Так,

$$\sim ((\forall\, t^1)\,(\exists\, t^2)\, X) \vdash (\exists\, t^1)\,((\forall\, t^2) \sim X : (?\,\forall\, t^2) \sim X) :$$
$$: (?\,\exists\, t^1)\,((\forall\, t^2) \sim X : (?\,\forall\, t^2) \sim X)$$

$$\sim ((\forall\, t^1)\,(\forall\, t^2)\, X) \vdash (\exists\, t^1)\,((\exists\, t^2) \sim X : (?\,\exists\, t^2) \sim X) :$$
$$:(?\,\exists\, t^1)\,((\exists\, t^2) \sim X : (?\,\exists\, t^2) \sim X)$$

и т. п. И даже для внутреннего отрицания такие утверждения в общем случае неверны. Так

$$(\neg\,\forall\, t^1)\,(\exists\, t^2)\, X \vdash (\exists\, t^1)\,((\forall\, t^2) \sim X : (?\,\forall\, t^2) \sim X)$$

$$(\neg\,\forall\, t^1)\,(\forall\, t^2)\, X \vdash (\exists\, t^1)\,((\exists\, t^2) \sim X : (?\,\exists\, t^2) \sim X)$$

## § 10. Значения истинности

$D1$. $[(\forall t)X] \leftarrow v^1$, если и только если возможно построить каждое из $Xi$ и каждое из них истинно; $[(\neg\forall t)X] \leftarrow$ $\leftarrow v^1$, если и только если возможно построить по крайней мере одно неистинное $Xi$; $[(?\forall t)X] \leftarrow v^1$, если и только если невозможно построить по крайней мере одно из $Xi$, а все $Xi$, которые можно построить, истинны.

$D2$. $[(\mathrm{N}t)X] \leftarrow v^1$, если и только если можно построить по крайней мере N истинных $Xi$; $[(\urcorner \mathrm{N}t)X] \rightarrow v^1$, если и только если можно построить $\mathrm{A} - \mathrm{N} + 1$ неистинных $Xi$; $[(?\mathrm{N}t)X] \leftarrow v^1$, если и только если невозможно построить N истинных $Xi$.

$$D3.\quad [(\exists t)X] \leftarrow v^1 \equiv [(\urcorner \forall t) \sim X] \leftarrow v^1$$
$$[(\urcorner \exists t)X] \leftarrow v^1 \equiv [(\forall t) \sim X] \leftarrow v^1$$
$$[(? \exists t)X] \leftarrow v^1 \equiv [(? \forall t) \sim X] \leftarrow v^1.$$

Для прочих кванторов $v^1$ определяется в зависимости от их определения. Прочие значения истинности определяются для любого $\mathcal{H}$ так:

$$D4.\quad [(\mathcal{H} t)X] \leftarrow v^4 \equiv [(\urcorner \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1$$
$$[(\urcorner \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^4 \equiv [(\mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1$$
$$[(? \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^4 \equiv [(\mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1 : [(\urcorner \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1$$
$$D5.\quad [(\mathcal{H} t)X] \leftarrow v^2 \equiv [(? \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1$$
$$[(\urcorner \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^2 \equiv [(? \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^1$$

Если в $X$ не входит $E$, то:

$$D6.\quad [(\alpha \mathcal{H} t)X] \leftarrow v^3 \equiv [\sim (t \leftarrow E)] \leftarrow v^1.$$

$T1$. Из принятых определений следует, что утверждения

$$\sim ((\mathcal{H} t)X \cdot (\urcorner \mathcal{H} t)X), \sim ((\mathcal{H} t)X \cdot (? \mathcal{H} t)X),$$
$$\sim ((\urcorner \mathcal{H} t)X \cdot (? \mathcal{H} t)X)$$

суть тавтологии. Это позволяет принять в качестве аксиомы утверждение:

$$A\,1.\quad \sim ((\alpha \mathcal{H} t)X \cdot (\beta \mathcal{H} t)X),$$

где $\alpha\mathcal{H}$ и $\beta\mathcal{H}$ есть любая пара из $\mathcal{H}$, $\urcorner$К и $\mathcal{H}$ ?.

$$T\,2.\quad (\alpha \mathcal{H} t)X \vdash \sim (\beta \mathcal{H} t)X \cdot \sim (\gamma \mathcal{H} t)X,$$

где $\alpha\mathcal{H}$, $\beta\mathcal{H}$ и $\gamma\mathcal{H}$ различаются как $\mathcal{H}$, $\urcorner\mathcal{H}$ и $?\mathcal{H}$ в любых перестановках.

## § 11. Кванторы и существование

Знаки $E$ и $\exists$ различны хотя бы уже потому, что $\alpha\exists t$ не является высказыванием, а $t\beta \leftarrow E$ есть высказывание. Кроме того, высказывания $(\alpha\mathcal{H} t)(t\beta \leftarrow E)$ возможны.

Представим себе такую ситуацию: один исследователь на основе каких-то соображений утверждает, что индивиды $t\,1, t\,2, \ldots, tn$ обладают такими-то признаками, а другой исследователь утверждает, что некоторые из этих индивидов вообще не существуют, т. е. строит высказывание $(\exists t)(t \urcorner \leftarrow E)$.

Для высказываний $s\alpha \leftarrow E$ помимо рассмотренных выше утверждений имеют силу утверждения:

$A\,1.\ (s\alpha \leftarrow E) \equiv (\alpha \exists s)(s \leftarrow E)$

$A\,2.\ ((s \downarrow P\,X)\alpha \leftarrow E) \equiv (\alpha \exists s)\,X.$

Если в $X$ не входит $E$, то в силу определений значений истинности, кванторов и знаков $\cdot$, $:$, $\sim$ и т. п. будут верны утверждения:

$T\,1.\ ([(\exists t)\,X] \leftarrow v^1) \rightarrow ((t \downarrow P\,X) \leftarrow E).$

$T\,2.\ ([(\exists t)\,X] \leftarrow v^1) \rightarrow (t \leftarrow E).$

$T\,3.\ ([(\forall t)\,X] \leftarrow v^1) \rightarrow (t \leftarrow E).$

Это создает иллюзию, будто для оперирования кванторами необходимо, чтобы $Kt$ не был экзистенциально пустым (как говорят, чтобы предметная область не была пустой). На деле же в науке приходится иметь дело и с неистинными (ложными, неопределенными, непроверяемыми) высказываниями с кванторами, для которых $Kt$ экзистенциально пуст.

## § 12. Правила логического следования

Система правил логического следования для высказываний с кванторами формируется непосредственно из определений (замена $\equiv$ на $\dashv\,\vdash$) и косвенно: из анализа ранее принятых определений и утверждений можно получить ряд утверждений о соотношениях высказываний с точки зрения значений истинности и единиц смысла и на этой основе сформулировать систему утверждений $X \vdash Y$ и $\vdash X$ (или для ослабленного следования. Мы ниже укажем направления, по которым идет построение интуитивной основы для теории логического следования в рассматриваемом случае. При этом мы для краткости просто перечислим соответствующие утверждения, полагая, что их «обоснование» не представляет принципиальных трудностей.

## § 13. Введение и удаление кванторов

Из $A1\ X9 - A9X9$ и $A1\ X8 - A\,5X\,8$ следует:

$T1$. Если $t$ не входит в $X$, то

$$(\alpha\,\mathcal{H}\,t)\,X \dashv\vdash X.$$

Примем утверждения:

$A\,1$. $X \vdash (\exists\, t)\,X$

$A\,2$. $(\forall\, t)\,X \vdash X$

$A\,3$. $(X \vdash Y) \to ((\mathcal{H}\,t)\,X \vdash (\mathcal{H}\,t)\,Y)$

$(X \vdash Y) \to ((\neg\,\mathcal{H}\,t)\,Y \succ (\neg\,\mathcal{H}\,t)\,X)\cdot((?\,\mathcal{H}\,t)\,Y \succ$
$\succ (?\,\mathcal{H}\,t)\,X)$,

где $\mathcal{H}$ есть любой из $\forall$ и $\exists$.

Следствия $A\,3$:

$T\,2$. $(\forall s)\,(s\,\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (\neg\,\exists\, s)\,(s\,\beta \leftarrow P)\cdot(\neg\,\exists\, s)$
$(s\,\gamma \leftarrow P)$

$(\exists\, s)\,(s\,\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (\neg\,\forall\, s)\,(s\,\beta \leftarrow P)\cdot(\neg\,\forall\, s)$
$(s\,\gamma \leftarrow P)$

$(\neg\,\forall\, s)\,(s\,\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (\exists\, s)\,(s\,\beta \leftarrow P) \bigvee (\exists\, s)$
$(s\,\gamma \leftarrow P)$

$(?\,\forall\, s)\,(s\,\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (?\,\exists\, s)\,(s\,\beta \leftarrow P) \bigvee (?\exists\, s)$
$(s\,\gamma \leftarrow P)$.

Для предикатов примем дополнительно утверждения:

$A\,4$. $(\exists\, P)\,(s \leftarrow P) \vdash (s \leftarrow P)$

$(s\,\neg \leftarrow P) \vdash (\forall\, P)\,(s\,\neg \leftarrow P)$

$(s\,? \leftarrow P) \vdash (\forall\, P)\,(s\,? \leftarrow P)$,

где $P$ не есть $P^*$ или $P^*\alpha \downarrow s^i$.

Из $A\,4$ получим:

$T\,3$. $(s \leftarrow P) \dashv\vdash (\exists\, P)\,(s \leftarrow P)$

$s\,\neg \leftarrow P \dashv\vdash (\forall\, P)\,(s\,\neg \leftarrow P)$

$s\,? \leftarrow P \dashv\vdash (\forall\, P)\,(s\,? \leftarrow P)$.

Эти утверждения и позволяют рассматривать всякое $s_\alpha \leftarrow$
$\leftarrow P$ как высказывание с неявно квантифицированным предикатом.

Для предикатов остается единственный случай в качестве проблемы — построение $(\mathrm{N}P)(s \leftarrow P)$ и $(\forall P)(s \leftarrow P)$. Такие случаи возможны. Пусть, например, $P^1$, $P^2,\ldots P^n$ суть все предикаты из области значения $P$, и при этом $(s \leftarrow P^1)\cdot(s \leftarrow P^2)\cdot\ldots\cdot(s \leftarrow P^n)$ истинно; в таком случае будет истинно $(\forall P)\ (s \leftarrow P)$.

Примем, далее, утверждение:

*A*5. Если $\vdash X$ и при этом $s$ не входит в связанном виде в $X$, то $\vdash(\forall s^*)\ X\ (s/s^*)$; аналогично для $P$.

*T*4. Если $\vdash X$ и при этом $s$ и $P$ не являются связанными в $X$, то $\vdash(\forall s)\ X$, $\vdash(\forall P)\ X$, $\vdash(\forall s)\ (\forall P)\ X$; аналогично для любого числа субъектов и предикатов.

Чтобы применить *A*5 к предикатам, необходимо сначала удалить все кванторы, связывающие предикаты, в соответствии с *A*4. Если при этом остаются связанные предикаты, на них, очевидно, *A*5 не распространяется.

*A*6. $(\forall t)\ X\cdot(t^i \in Kt) \vdash X\ (t/t^i)$

$X\cdot(t^i \in Kt) \vdash (\exists t)\ X\ (t^i/t.)$.

Следствия *A*6:

*T*5. $(\forall t)\ X\cdot(t^i \in Kt) \vdash (\exists t^i)\ X\ (t/t^i)$

$X\ (\forall t^i)\ (t^i \in Kt) \vdash (\exists t)\ X\ (t^i/t)$.

*A*7. Если $t$ есть индивидуальный термин, то $(\forall t)\ X \equiv X$.

Прочие случаи введения и удаления кванторов рассматриваются в связи с учетом структуры высказываний.

## § 14. Кванторы и знаки «и» и «или»

Пусть $X^1$, $X^2, \ldots, X^n$ суть любые высказывания. Благодаря *A*3 предшествующего параграфа получим следствия:

*T*1. $(\exists t)\ (X^1\cdot\ldots\cdot X^n) \vdash (\exists t)\ X^1\cdot\ldots\cdot(\exists t)\ X^n$

*T*2. $(\forall t)\ (X^1\cdot\ldots\cdot X^n) \vdash (\forall t)\ X^1\cdot\ldots\cdot(\forall t)\ X^n$

*T*3. $(\neg\exists t)\ X^1 \mid\succ (\neg\exists t)\ (X^1\cdot\ldots\cdot X^n)$

*T*4. $(\neg\forall t)\ X^1 \mid\succ (\neg\forall t)\ (X^1\cdot\ldots\cdot X^n)$

и т. п. Но они не исчерпывают всех возможных случаев.

Примем утверждения $A1$:

$a)$ $(\exists t)\, X^1 \cdot \ldots \cdot (\exists t)\, X^n \vdash (\exists t)\, (X^1 \vee \ldots \vee X^n)$

$в)$ $(\forall t)\, X^1 \cdot (\exists t)\, X^2 \vdash (\exists t)\, (X^1 \cdot X^2)$

$(\forall t)\, X^1 \cdot \ldots \cdot (\forall t)\, X^{n-1} \cdot (\exists t)\, X^n \vdash (\exists t)\, (X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n)$

$c)$ $(\urcorner \exists t)\, (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) \dashv\vdash (\urcorner Et)\, X^1 \vee \ldots \vee (\urcorner \exists t)\, X^n$

$d)$ $(? \exists t)\, (X^1 \cdot \ldots \cdot Y^n) \dashv\vdash ((? \exists t)\, X^1 \vee \ldots \vee (? \exists t)\, x^n) \cdot$
$\cdot \sim ((\urcorner \exists t)\, X^1) \cdot \ldots \cdot \sim ((\urcorner \exists t)\, X^n)$.

Утверждения $A2$:

$a)$ $(\forall t)\, X^1 \cdot \ldots \cdot (\forall t)\, X^n \vdash (\forall t)\, (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$

$в)$ $(\urcorner \forall t)\, (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) \dashv\vdash (\urcorner \forall t)\, X^1 \vee \ldots \vee (\urcorner \forall t)\, X^n$

$c)$ $(? \forall t)\, (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) \dashv\vdash ((? \forall t)\, X^1 \vee \ldots \vee (? \forall t)\, X^n) \cdot$
$\cdot \sim ((\urcorner \forall t)\, X^1) \cdot \ldots \cdot \sim ((\urcorner \forall t)\, X^n)$.

Пусть $X^{1*}$ есть $(X^1 \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$, $X^{2*}$ есть $(X^2 \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n), \ldots,$ $X^{n*}$ есть $(X^n \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1})$; $Z^1$ есть $(\urcorner \exists t)\, (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n)$, $Z^2$ есть $(\urcorner \exists t)\, (\sim X^1 \sim \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim Y^n)$; $Y^1$ есть $(\exists t)\, X^{1*}$, $Y^2$ есть $(\exists t)\, X^{2*}, \ldots,$ $Y^n$ есть $(\exists t)\, X^{n*}$; $Y^{1*}$ есть $(\urcorner \exists t)\, X^1$, $Y^{2*}$ есть $(\urcorner \exists t)\, X^2, \ldots,$ $Y^{n*}$ есть $(\urcorner \exists t)\, X^n$; $W$ есть $(Z^1 Z^2 Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n)$; $W^1, \ldots, W^k$ суть всевозможные высказывания, которые образуются из $W$ путем замены одного или более (но не больше $n-2$) из $Y^1, \ldots, Y^n$ соответствующими высказываниями из числа $Y^{1*}, \ldots, Y^{n*}$; $V^1, \ldots, V^m$ суть всевозможные высказывания, образующиеся из $(X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n)$ путем замены всех или $i$ (где $1 \leqslant i \leqslant n-2$) высказываний из числа $X^1, X^2, \ldots, X^n$ соответствующими высказываниями из числа $\sim X^1, \sim X^2, \ldots, \sim X^n$.

Утверждения $A3$:

$a)$ $(\forall t)\, (X^1 : X^2) \dashv\vdash (\forall t)\, (X^1 \sim X^2) : (\forall t)\, (\sim X^1 X^2) : (\exists t)$
$(X^1 \sim X^2)\, (\exists t)\, (\sim X^1 X^2)\, (\urcorner \exists t)\, (X^1 X^2)\, (\urcorner \exists t)$
$(\sim X^1 \sim X^2)$; $(\forall t)\, (X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \dashv\vdash (\forall t)\, X^{1*} :$
$: (\forall t)\, X^{2*} : \ldots : (\forall t)\, X^{n*} : W : W^1 : \ldots : W^k$

$в)$ $(\urcorner \forall t)\, (X^1 : X^2) \dashv\vdash (\exists t)\, (X^1 X^3) \vee (\exists t)\, (\sim X^1 \sim X^2)$
$(\urcorner \forall t)\, (X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \dashv\vdash (\exists t)\, (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) \vee$
$\ldots \vee (\exists t)\, V^1 \vee (\exists t)\, V^m$

c) $(? \forall t)\ (X^1 : X^2) \dashv\vdash ((? \exists t)\ (X^1 X^2) \vee (? \exists t)\ (\sim X^1 \cdot \sim X^2)) \sim ((\urcorner \exists t)\ (X^1 X^2)) \sim ((\urcorner \exists t)\ (\sim X^1 \sim X^2))$

$(? \forall t)\ (X^1 : \ldots : X^n) \dashv\vdash ((? \exists t)\ (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) \vee \ldots \vee (? \exists t) V^1 \vee \ldots \vee (? \exists t) V^m) \sim ((\urcorner \exists t)\ (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) \cdot \sim ((\urcorner \exists t) V^1) \cdot \ldots \cdot \sim ((\urcorner \exists t) V^m)$

Пусть $F^1$ есть $(\exists t)\ (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$, $F^2$ есть $(\exists t)$, $V^1, \ldots, F^{m+1}$ есть $(\exists t)\ V^m$; $F^{1*}$ есть $(\urcorner \exists t)\ (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$, $F^{2*}$ есть $(\urcorner \exists t)\ V^1, \ldots, F^{(m+1)*}$ есть $(\urcorner \exists t)\ V^m$; $F^1$ есть $(\urcorner \exists t)\ (X^1 \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$, $F^2$ есть $(\urcorner \exists t)\ (X^2 \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n), \ldots, F^n$ есть $(\urcorner \exists t)\ (X^n \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1})$; $Q$ есть $(F^1 F^2 \cdot \ldots \cdot F^{m+1} F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_n)$; $Q^1, \ldots, Q^l$ — всевозможные высказывания, которые образуются из $Q$ путем замены $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1)$ высказываний из числа $F^1, \ldots, F^{m+1}$ соответствующими высказываниями из числа $F^{1*}, \ldots, F^{(m+1)*}$.

Утверждения $A4$:

a) $(\exists t)\ (X^1 : X^2) \dashv\vdash (\urcorner \forall t)(X^1 X^2)(\urcorner \forall t)\ (\sim X^1 \sim X^2)$

$(\exists t)\ (X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \dashv\vdash (\urcorner \forall t)\ (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) \cdot (\urcorner \forall t)\ V^1 \cdot \ldots \cdot (\urcorner \forall t)\ V^n$

в) $(\urcorner \exists t)\ (X^1 : X^2) \dashv\vdash (\forall t)\ (X^1 X^2) : (\forall t)\ (\sim X^1 \sim X^2) : (\exists t)\ (X^1 X^2)\ (\exists t)\ (\sim X^1 \sim X^2)\ (\urcorner \exists t)\ (X^1 \sim X^2) \cdot (\urcorner \exists t)\ (\sim X^1 X^2)$; $(\urcorner \exists t)\ (X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \dashv\vdash (\forall t)\ (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) : (\forall t)\ V^1 : \ldots : (\forall t)\ V^m : Q : Q^1 : \ldots : Q^l$

c) $(? \exists t)\ (X^1 : X^2) \dashv\vdash (? \forall t)\ (X^1 X^2)\ (? \forall t)\ (\sim X^1 \sim X^2)$

$(? \exists t)\ (X^1 : X^2 : \ldots : X^n) \dashv\vdash (? \forall t)\ (X^1 X^2 \cdot \ldots \cdot X^n) \cdot (? \forall t)\ V^1 \cdot \ldots \cdot (? \forall t)\ V^n$

Утверждения $A5$:

a) $(\forall t)\ X^1 : \ldots : (\forall t)\ X^n \vdash (\forall t)\ (X^1 : \ldots : X^n)$

в) $(\forall t)\ X^1 : (\exists t)\ X^2 \vdash (\exists t)\ (X^1 : X^2)$

$(\forall t)\ X^1 : \ldots : (\forall t)\ X^{n-1} : (\exists t)\ X^n \vdash (\exists t)\ (X^1 : \ldots : X^n)$

c) $(\exists t)\ X^1 : \ldots : (\exists t)\ X^n \vdash (\exists t)\ (X^1 : \ldots : X^n)$

d) $(\forall t)\ X^1 : (? \forall t)\ X^2 \vdash (? \forall t)\ (X^1 : X^2)$

$(\alpha^1 \forall t)\ X^1 : \ldots : (\alpha^n \forall t)\ X^n \vdash (? \forall t)\ (X^1 : \ldots : X^n)$, где $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ означают, что по крайней мере в одном из $\alpha^1 \forall t, \ldots, \alpha^n \forall t$ перед $\forall$ имеется?;

$$e)\ (\exists\, t)\, X^1 : (?\, \exists\, t)\, X^2 \vdash (?\, \exists\, t)\, (X^1 : X^2)$$

$$(\alpha^1 \exists\, t)\, X^1 : \ldots : (\alpha^n \exists\, t)\, X^n \vdash (?\, \exists\, t)\, (X^1 : \ldots : X^n),$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ те же, что и выше.

Следствия *A1* — *A5* для знака $\bigvee$:

$$a)\ (\text{Ӈ}\, t)\, (X^1 \bigvee \ldots \bigvee X^n) \dashv\vdash \text{Ӈ}(t)\, X^1 \bigvee \ldots \bigvee (\text{Ӈ}\, t)\, X^n$$

$$b)\ (\urcorner\, \exists\, t)\, (X^1 \bigvee \ldots \bigvee X^n) \dashv\vdash (\forall\, t)\, (\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$$

$$(\urcorner\, \forall\, t)\, (X^1 \bigvee \ldots \bigvee X^n) \dashv\vdash (\exists\, t)\, (\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$$

$$c)\ (?\, \exists\, t)\, (X^1 \bigvee \ldots \bigvee X^n) \dashv\vdash (?\, \forall\, t)\, (\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$$

$$(?\, \forall\, t)\, (X^1 \bigvee \ldots \bigvee X^n) \dashv\vdash (?\, \exists\, t)\, (\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n)$$

## § 15. Силлогистика

Мы уже отмечали, что слово «есть» не отличается ясностью и не является однозначным. Изображение высказываний в форме «$s$ есть $P$» при построении силлогистики, как это обычно делают, оставляет совершенно неопределенным, какие именно высказывания имеются в виду: высказывания о принадлежности признаков, о включении в класс или о тождестве или включении терминов по значению. А это не всегда одно и то же.

Надо различать силлогистику классов и силлогистику свойств (признаков). Силлогистику свойств образуют следующие утверждения *A1* (и выводимые из них следствия):

$$a)\ (\exists\, s)\, (s\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (\exists\, s^*\alpha \downarrow P)\, (s^*\alpha \downarrow P \leftarrow P^* \downarrow s)$$

$$в)\ (\forall\, s)\, (s\,\alpha \leftarrow P) \dashv\vdash (\forall\, s^*\, \beta \downarrow P)\, (\forall\, s^*\, \gamma \downarrow P)\, (\exists\, P^* \downarrow s)$$

$$((s^*\, \beta \downarrow P \urcorner \leftarrow P^* \downarrow s)\, (s^* \gamma \downarrow P \urcorner \leftarrow P^* \downarrow s))$$

$$c)\ (\text{Ӈ}\, s)\, (s\,\alpha \leftarrow P^1)\, (\forall\, s^*\, \alpha \downarrow P^1)\, ((s^*\, \alpha \downarrow P^1)\, \beta \leftarrow P^2) \vdash$$

$$(\text{Ӈ}\, s)\, (s\,\beta \leftarrow P^2).$$

Силлогистику классов образуют утверждения *A2* (и выводимые из них следствия):

*a*) $(\exists t^1)(t^1 \in Kt^2) \vdash (\exists t^2)(t^2 \in Kt^1)$

*в*) $(\forall t^1)(t^1 \in Kt^2) \vdash (\forall \sim t^2)(\sim(\sim t^2 \in Kt^1))$

*c*) $(\text{Ɥ} t^1)(t^1 \in Kt^2)(\forall t^2)(t^2 \in Kt^3) \vdash (\text{Ɥ} t^1)(t^1 \in Kt^3)$.

Возможны смешанные формы силлогистики, утверждения которых содержат высказывания со знаками $\in$, $\leftarrow$, $>$, $\subset$ и т. п. Классическая силлогистика свойств получается путем исключения из *A1* неопределенностей.

## § 16. Неявные кванторы

Утверждение

$$(t^1 \rightarrow t^2) \cdot (t^1 \leftarrow P\,X) \rightarrow (t^2 \leftarrow P\,X\,(t^1/t^2))$$

(т. е. «То, что верно о роде, верно и о виде») не всегда правомерно. Например, возможно, что $s^1 \rightarrow s^2$, $s^1 \leftarrow P$ истинно для некоторого индивида из области значения $s^1$, а $s^2 \leftarrow P$ неистинно для некоторого индивида из области значения $s^2$ (для другого индивида из области значения $s^1$).

Если приведенное утверждение принимают, то фактически неявно предполагают квантор общности («все») в высказывании $t^1 \leftarrow PX$, т. е. употребляют последнее как $(\forall t^1)(t^1 \leftarrow PX)$. Например, утверждая «Сумма углов треугольника равна 180°», имеют в виду (предполагают) все треугольники (всякий, любой, каждый треугольник). Обычно такое употребление высказываний имеет место тогда, когда $X$ вытекает из определения $t^1$. А в случае абстрактных объектов все истинные высказывания, содержащие $t^1$, таковы.

Среди случаев неявной квантификации интерес представляют два случая, определяемые такими утверждениями:

*A1*. $(\forall s)\,X \leftrightarrow ((s^* \in Ks) \rightarrow (s^* \leftarrow PX\,(s/s^*))$,

где $s$ свободен в $X$.

*A2*. $(s^1 \downarrow PX \rightarrow s^2) \rightarrow (\forall s^2)(s^2 \leftarrow PX\,(s^1/s^2))$.

где $s^1$ свободен в $X$.

## § 17. Термины

Из высказываний с кванторами получаются термины по схеме

$$t \downarrow PX,$$

где $t$ свободен в $X$ («$t$ такой, что $X$»). В частности, важное значение имеет термин

$$P^i \downarrow P((\forall s)(s \leftarrow P^i)),$$

который читается так: $P^i$ такой, который присущ всем $s$. Будем его для краткости изображать символом

$$P^i \downarrow \forall s.$$

Для этого термина имеет силу утверждение:

$$A1.\ (s^1 \rightarrow s^2) \leftrightarrow (\forall s^2)(\forall P^* \downarrow \forall s^1)(s^2 \leftarrow P^* \downarrow \forall s^1).$$

## § 18. Теория логического следования

Мы изложили (не исчерпывающим образом, конечно) те интуитивные предпосылки или основания, на которых строится теория логического следования для высказываний с кванторами. Из этого изложения должно быть ясно, что классическая, интуиционистская (конструктивная) и прочие виды и варианты логики предикатов и различные варианты силлогистики суть лишь фрагменты или вариации отдельных фрагментов теории логического следования для высказываний с кванторами.

## § 19. Построение высказываний

С точки зрения построения высказывания с кванторами можно разбить на две группы. К первой группе относятся высказывания, для получения которых из других данных высказываний достаточно знать правила логического следования, ко второй группе — остальные. Общеизвестно, что значительная часть высказываний с кванторами получается так, что одних только правил логического следования недостаточно для их «оправдания». Поскольку проблема построения таких высказываний нетривиальна лишь для высказываний с кванторами общности, ее можно назвать проблемой генерализации.

Существует множество путей генерализации. Укажем некоторые из них и сформулируем некоторые их принципы в качестве иллюстрации того, что может по этому поводу сказать в категорической форме логическая теория научных знаний и в каком направлении возможны приложения ее усилий.

## § 20. Полная индукция

Простейший случай полной индукции заключается в следующем. Пусть $X$ есть высказывание, в которое входит $s$. Пусть $s^1 \ldots, s^n$ $(n \geqslant 1)$ суть все индивиды из области значения $s$, а $n$ есть конечное число. Если высказывание

$$(s^1 \leftarrow PX(s/s^1)) \cdot \ldots \cdot (s^n \leftarrow PX(s/s^n))$$

истинно, по определению $(\forall s)X$ и $[(\forall s)X] \leftarrow v^1$ будет истинно и $(\forall s)X$.

Более сложный случай представляет собою получение $(\forall s)X$ из высказываний

$$(\forall s_1)X(s/s_1), \ldots, (\forall s_m)X(s/s_m),$$

где $s_1, \ldots, s_m$ ($m$ — конечное число) образуют деление $s$. Здесь общее высказывание получено точно также в силу определений.

В обоих рассмотренных случаях при получении общего высказывания использовалась некоторая внелогическая гипотеза:

1) в первом случае — допущение, что $s_1, \ldots, s^n$ суть все индивиды из области значения $s$;

2) во втором случае — допущение, что $s_1, \ldots, s_m$ образуют деление $s$, т. е. индивиды из области значения $s_1$, $\ldots, s_m$ исчерпывают множество индивидов из области значения $s$.

Пусть имеется такое определение $s$:

1) $s \rightarrow s^1, \ldots s \rightarrow s^n$ ($n$ конечно);

2) если $s \rightarrow s_1, \ldots, s \rightarrow s_m$, то $s \rightarrow s^{i1}, \ldots, s \rightarrow s^{ik}$, где $m$ и $k$ конечны;

3) других $s$ нет.

Пусть истинны

$$(\forall s^1)(s^1 \leftarrow PX(s/s^1)), \ldots, (\forall s^n)(s^n \leftarrow PX(s/s^n)),$$

и каким-то путем установлено (в частности, доказано), что истинно

$$(\forall s_1)(s_1 \leftarrow PX(s/s_1)) \cdot \ldots \cdot (\forall s_m)(s_m \leftarrow PX(s/s_m)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall s^{i1})(s^{i1} \leftarrow PX\ (s/s^{i1})) \cdot \ldots \cdot (\forall s^{ik})(s^{ik} \leftarrow PX(s/s^{ik})).$$

В таком случае будет истинно

$$(\forall s^1)(s^1 \leftarrow PX(s/s^1)) \cdot \ldots \cdot (\forall s^n)(s^n \leftarrow PX(s/s^n)) \cdot$$
$$\cdot (\forall s^{i1})(s^{i1} \leftarrow PX(s/s^{i1}) \cdot \ldots \cdot (\forall s^{ik})(s^{ik} \leftarrow PX(s/s^{ik}))$$

и по определению (поскольку других $s$ нет)

$$(\forall s)\, X.$$

Здесь внелогическим допущением является способ перечисления всех индивидов $s$, скрытый в определении последнего. Причем, здесь класс индивидов может быть бесконечным.

В случае математической индукции предполагается (допускается или усматривается из свойств объектов) возможность упорядочить индивиды $s$ и построить утверждение

$$(s^n \leftarrow PX(s/s^n)) \rightarrow (s^{n+1} \leftarrow PX(s/s^{n+1})),$$

где $s^n$ есть любой индивид. Если истинно

$$s^1 \leftarrow PX(s/s^1)$$

и только что приведенное утверждение, то истинно

$$(\forall s)\, X.$$

Здесь опять-таки используются внелогические утверждения.

Полная индукция в отношении эмпирических объектов тривиальна и возможна лишь для конечного числа (даже уже — для практически обозримого) индивидов данного класса. В случае абстрактных объектов она является весьма эффективным средством (и в случае бесконечных классов), широко распространенным в логике, математике и других «математизированных» науках.

Полную индукцию можно назвать доказательной, строгой или необходимой.

## § 21. Неполная индукция

Если число индивидов данного класса бесконечно или таково, что практически невозможно пересмотреть все их (или вообще по каким-то причинам нельзя пересмотреть все индивиды этого класса), а использование методов полной индукции исключено, то используется так называемая неполная, эмпирическая или вероятностная индукция.

Известны различные формы неполной индукции, каждая из которых опирается на некоторые принципы (допущения). Последние обычно не формулируются явным образом. Но раз неполная индукция имеет место, такие принципы — факт. Приведем некоторые виды неполной индукции.

Количественная индукция:

1) если число случаев, когда $s \leftarrow PX$, достаточно велико, и при этом не встречаются случаи, когда $s \leftarrow P{\sim}X$, то $(\forall s)X$ считается истинным (популярная индукция);

2) если вероятность того, что $s \leftarrow PX$ достаточно велика, то $(\forall s)X$ считается истинным (частотная индукция).

Но когда именно имеет место указанное выше «достаточно», зависит от обстоятельств. Никакие логические критерии здесь не формулируются. Играет роль опыт и удача. Может случиться так, что исследователь «наткнулся» на такое $X$, что $(\forall s)X$, хотя он и рассмотрел всего несколько примеров $s$. Но может случиться так, что исследователь пересмотрел огромное число $s$, построил $(\forall s)X$, а потом нашли $s$ такой, что $s \leftarrow P \sim X$. Кроме того, встречаются случаи, когда заведомо известно, что возможно $s \leftarrow P \sim X$, но оперируют с $(\forall s)X$ как с истинным.

Условная индукция: если $s \leftarrow PX$ в некоторых данных условиях, то $(\forall s)X$ считается истинным в этих условиях. Здесь эффект зависит от точности, полноты и т. п. учета условий. Здесь можно сформулировать довольно четкий принцип: «Если истинно $s \leftarrow PX$, то возможно установить (зафиксировать) такие условия, что в этих условиях $s \leftarrow PX$ всегда истинно, т. е. $(\forall s)X$». Этот принцип теоретически безупречен. Но в практическом исполнении его эффект опять-таки зависит от обстоятельств. Так, высказывание «Человек может стать императором Франции» истинно в отношении Наполеона I; можно (в принципе) перечислить условия, необходимые для этого; и в этих условиях (при наличии их) это высказывание будет истинно для всех людей; только эти условия повторимы далеко не всегда и не для всех людей. В практическом применении названного принципа всегда действует здравый смысл, вводящий ограничения на характер $X$ и на описание условий, когда $s \leftarrow PX$.

Условно-количественная индукция: выбираются произвольные элементы $Ks$ (минимум два); если при достаточно большом числе случаев и достаточном разнообразии их условий (крайний вариант — взаимоисключающие условия) истинно $s \leftarrow PX$, то $(\forall s)X$ считается истинным.

Индукция по различию: если индивиды $s^1,\ldots,s^n$ класса $s$ достаточно различны и при этом истинны $s^1 \leftarrow PX(s/s^1),\ldots,s^n \leftarrow PX(s/s^n)$, то $(\forall s)X$ считается истинным. Индукция по сходству: если истинны $s^1 \leftarrow PX(s/s^1),\ldots,$ $s^n \leftarrow PX(s/s^n)$, все индивиды $s^1,\ldots,$ $s^n$ достаточно сходны, а в $Ks$ включаются только $s^1,\ldots,s^n$ и такие индивиды, которые с ними достаточно сходны, то $(\forall s)X$ считается истинным.

Конечно, в приведенных формулировках употребляются выражения, которые нуждаются в уточнениях и могут быть уточнены в рамках логики. Но какие бы точные понятия ни были при этом введены, они не устранят главного: некоторых внелогических (эвристических) допущений.

## § 22. Редукция

Под редукцией здесь имеется в виду следующая операция: 1) допускается $(\alpha\forall s)X$; 2) из него (и других высказываний, которые считаются истинными) выводятся следствия; 3) если эти следствия истинны, если число их достаточно велико и если они достаточно важны, то $(\alpha\forall s)X$ принимается за истинное. Очевидно, что эти «достаточно велико» и «достаточно важны» точно так же имеют внелогическую природу, зависят от условий, подвержены колебаниям и т. п. Предельный случай — следствия точно определены, и возможности получения их с помощью $(\alpha\forall s)X$ достаточны для признания последнего за истинное.

Возможны два варианта редукции. Сильный вариант: если из $(\alpha\forall s)X$ получается по крайней мере одно неистинное следствие, то оно не является истинным. Слабый вариант: из $(\alpha \mathrm{H} s)X$ могут получаться неистинные следствия; но если они не играют существенной роли (ими можно пренебречь), то $(\alpha \mathrm{H} s)X$ может быть принят за истинное. В этом случае встает вопрос о «весе» (о важности) следствий. Если «вес» истинных следствий из $(\alpha \mathrm{H} s)X$ оценивается числом $\alpha$, а неистинных — числом $\beta$, то в зависимости от соотношения $\alpha$ и $\beta$ решают, считать его истинным или нет.

# МОДАЛЬНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

## § 1. События

*D1.* Категорические высказывания:

1) высказывания $sa \leftarrow P$ и $sa \leftarrow E$ суть категорические высказывания;

2) если $X$ есть категорическое высказывание, то $(\alpha \Upsilon t)X$ есть категорическое высказывание:

3) если $X$, $X^1$,..., $X^n$ суть категорические высказывания, то $\sim X$, $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$, $X^1 : \ldots : X^n$ и определяемые через них структуры (в частности, $X^1 \vee \ldots \vee X^n$) суть категорические высказывания;

4) $X \rightarrow Y$ есть категорическое высказывание, где $X$ и $Y$ суть любые высказывания.

*D2.* То, о чем говорится в категорическом высказывании, будем называть событием. Если $X, Y, X^1, X^2, \ldots,$ $\sim X$, $\sim Y$,... суть высказывания, то символы

$$|x|,\ |y|,\ |x^1|,\ |x^2|, \ldots,\ |\sim x|,\ |\sim y|, \ldots$$

будут изображать соответственно термины, обозначающие события, о которых в них говорится. Они будут читаться так: «Тот факт, что $X$», «То, что $X$», «Тот факт, что $Y$» и т. д. Например, событие, о котором идет речь в высказывании «Земля вращается вокруг Солнца», обозначается термином «Тот факт, что Земля вращается вокруг Солнца». Отношение $|x|$ и $|\sim x|$ определено, очевидно, отношением $X$ и $\sim X$.

*D3.* $|x| \leftarrow E \equiv [X] \leftarrow v^1$

$|x| \urcorner \leftarrow E \equiv [X] \urcorner \leftarrow v^1.$

События существуют или не существуют в некоторой данной или в любой ситуации. Последняя может быть задана явно или предполагаться (быть ясной из контекста).

Она может быть задана путем: 1) указания на пространственную область; 2) указания на время; 3) перечисления некоторого множества событий; 4) комбинирования способов 1—3. Будем говорить, что заданы координаты события, если каким-либо из способов 1—4 задана ситуация, в которой оно существует. Если координаты безразличны по тем или иным причинам, фиксирование этого обстоятельства есть частный случай фиксирования координат.

*D4*. Событие $|x|$ будем называть локальным, если $X$ истинно в одних координатах и неистинно в других, и универсальным, если $X$ истинно в любых координатах. Локальные события и образуют ту предметную область, для которой были изобретены модальные знаки.

Мы не будем вводить особые знаки для координат событий, чтобы не усложнять символики. Но условимся, что они в случае надобности могут быть приписаны на основе следующих соглашений.:

1) к каждому высказыванию может быть приписан знак координат события, о котором говорится в этом высказывании;

2) в пределах одного и того же утверждения будет предполагаться тождество координат для всех событий, о которых говорится в этом утверждении, так что ко всем высказываниям, входящим в это утверждение, могут быть приписаны одинаковые знаки координат (или к утверждению в целом может быть приписано выражение «в одних и тех же координатах» или «для одних и тех же координат»).

## § 2. Основные модальности

*D1*. Высказывания о возможности и необходимости наступления событий, их внутренние отрицания, неопределенные формы и всевозможные внешние отрицания суть основные модальные высказывания. Будем их изображать символами:

1) $M|x|$ — «$|x|$ возможно», «Наступление $|x|$ возможно», «$|x|$ может наступить» и т. п.;

2) $\neg M|x|$ — «$|x|$ невозможно»;

3) $?M|x|$ — «Нельзя установить, $M|x|$ или $\neg M|x|$»;

4) $N|x|$ — «$|x|$ необходимо», «$|x|$ обязательно наступит», «Наступление $|x|$ неотвратимо»;

5) $\neg N|x|$ — «$x$ ненеобходимо»;

6) $?N|x|$ — «Нельзя установить, $N|x|$ или $\neg N|x|$».

Выражение «Нельзя установить» означает, что в силу сложившихся в данной области науки условий мы не имеем оснований для того, чтобы отнести событие $|x|$ к числу возможных (необходимых) событий, и точно так же не имеем оснований для того, чтобы отнести это событие к числу невозможных (ненеобходимых).

Знаки $M$ и $N$ суть предикаты: символы

$$\alpha M|x| \quad \text{и} \quad \alpha N|x|$$

вполне адекватны символам

$$|x|\alpha \leftarrow M \quad \text{и} \quad |x|\alpha \leftarrow N.$$

Причем, знаки $M$ и $N$ суть предикаты, с помощью которых характеризуются сами события, а не психические состояния тех, кто рассуждает о событиях. Они суть структурные элементы знаний, и как таковые они лишены психологической окраски. Содержащие их высказывания имеют смысл и поддаются проверке независимо от психических состояний тех, кто высказывает,— имеют объективный смысл и определенные значения истинности.

Изображение модальных высказываний приведенными символами есть, конечно, их схематизация и стандартизация. В фактических языках модальные знаки могут занимать и другие позиции. Например, в высказывании «$s$ может иметь $P$» слово «может» расположено так, что его характер как предиката скрыт; но, зная правила русского языка, мы вправе заменить это предложение на такое: «Возможен $s$, который имеет $P$».

Модальные высказывания в нашем понимании суть высказывания о модальности событий. Иногда от этого отличают модальность высказываний и рассматривают выражения вида «$X$ есть возможное (необходимое и т. д.) высказывание». Но на деле модальность высказываний так или иначе сводится к модальности событий. Так, если потребовать разъяснить смысл выражения «$X$ есть необходимое высказывание», то в конце концов выяснится, что здесь либо вообще можно обойтись без термина «необходимо» (поскольку, например, имеют в виду то, что $X$ всегда истинно, тавтологично), либо имеется в виду необходимость события $|x|$.

Модальность события надо отличать от модальности поиска события. Последний точно так же есть событие, но модальность его не всегда совпадает с модальностью события, которое хотят обнаружить. Единственное правило, которое здесь можно сформулировать,— невозможное событие невозможно обнаружить.

## § 3. Введение модальностей.

Введение модальных предикатов в употребление в той или иной области науки зависит от условий и потребностей этой науки. Если потребность в них появляется, то удовлетворение ее должно считаться со следующими логическими принципами.

При введении предиката «возможно» могут встретиться такие три случая: 1) некоторые события признаются возможными (невозможными), т. е. зачисляются в класс возможных (невозможных); класс невозможных (возможных) событий при этом остается неопределенным; 2) часть событий признается возможными, другая часть — невозможными, и при этом остаются еще события, которые не попадают в число возможных и в число невозможных; 3) каждое событие попадает либо в число возможных, либо в число невозможных. Аналогично для предиката «необходимо». Таким образом, выражение «Событие не является возможным» может означать, что событие не зачислено в класс возможных, и может означать, что событие является невозможным. А это не одно и то же. Аналогично для необходимости. Мы различаем это посредством различия внутреннего и внешнего отрицаний: $\sim M \mid x \mid$ и $\neg M \mid x \mid$, $\sim N \mid x \mid$ и $\neg N \mid x \mid$.

Если событие не попадает в число возможных (необходимых) и в число невозможных (ненеобходимых), то оно неопределенно с точки зрения возможности (необходимости). Эта неопределенность не есть нечто раз навсегда установленное. Условия в данной науке могут измениться, и модально неопределенное событие может попасть в какой-либо модально определенный класс. Нельзя также априори исключить события, которые остаются модально неопределенными при любых изменениях в науке.

При введении каждого модального предиката (или при установлении модальной характеристики событий) имеют силу утверждения:

$$M \mid x \mid : \neg M \mid x \mid : ?\, M \mid x \mid$$

$$N \mid x \mid : \neg N \mid x \mid : ?\, N \mid x \mid .$$

Если неопределенность исключается, т. е. если $\sim ?M\,|x|$ и $?\,N\,|x|$, то

$$M\,|\,x\,|:\neg M\,|\,x\,|$$
$$N\,|\,x\,|:\neg N\,|\,x\,|.$$

Если вводятся оба предиката $M$ и $N$, то должны выполняться утверждения:

$$N\,|\,x\,|\vdash M\,|\,x\,|$$
$$\neg M\,|\,x\,|\vdash \neg N\,|\,x\,|$$
$$\sim M\,|\,x\,|\vdash \sim N\,|\,x\,|.$$

Если событие не зачисляется в класс возможных и в класс невозможных, то из этого не следует, что оно не зачисляется в класс необходимых и в класс ненеобходимых, т. е. в общем случае

$$\sim (?\,M\,|\,x\,|\vdash ?\,N\,|\,x\,|).$$

Утверждения

$$M\,|\,x\,|:M\,|\sim x\,|$$
$$N\,|\,x\,|:N\,|\sim x\,|$$
$$N\,|\,x\,|\vee N\,|\sim x\,|$$

не всегда имеют силу, поскольку встречаются случаи, когда

$$M\,|\,x\,|\cdot M\,|\sim x\,|$$
$$\neg N\,|\,x\,|\cdot \neg N\,|\sim x\,|.$$

Для необходимости же всегда

$$\sim (N\,|\,x\,|\cdot N\,|\sim x\,|).$$

Пусть символы

$$Mod,\ Mod^1,\ Mod^2,\ \ldots$$

каждый по отдельности есть любой из $\alpha N$ и $\alpha M$, а различие индексов обозначает лишь то, что эти знаки могут быть взяты в различных комбинациях. Примем определение:

*D1.* События $|x^1|$ и $|x^2|$ модально зависимы, если

$$(Mod^1\,|\,x^1\,|\vdash Mod^2\,|\,x^2\,|)\vee(Mod^3\,|\,x^2\,|\vdash Mod^4\,|\,x^1\,|).$$

и модально независимы, если

$$\sim(Mod^1|x^1|| \vdash Mod^2|x^2|)\cdot\sim(Mod^3|x^3|| \vdash Mod^4|x^1|).$$

Имеются различные способы введения модальных предикатов. Например, если событие однажды наблюдалось, то оно считается возможным; если в нашем опыте событие рано или поздно наступало в достаточно большом числе случаев, то оно считается необходимым; если из определения $t$ следует $X$ ,то $|x|$ считается необходимым, а $|\sim x|$ — невозможным. Общая схема имеет вид «Если $Y$, то $Mod\,|x|$» где $Y$ есть какая-то совокупность знаний. Эта схема не есть гарантия того, что $Mod\,|x|$ будет истинно. Просто, так поступают люди, вводящие в обиход модальные знаки.

## § 4. Логические границы модальности

Какие события, изучаемые той или иной наукой, являются возможными, необходимыми и т. д., это выясняется в самой данной науке. Но логика устанавливает границы, за которые никакая наука не может выйти при определении классов возможных, необходимых и т. д. событий. Эти пределы образуют так называемые логические модальности; а если модальность (возможность, необходимость и т. п.) события выясняется путем конкретного исследования в той или иной данной науке, то она называется фактической или эмпирической.

Имеются различные способы определения логических модальностей, из которых в современной логике обычно применяются следующие два: 1) логические модальности определяются через выполнимость, общезначимость (тавтологичность), противоречивость и т. д. формул матричного построения (алгебры логики; обычно берут двузначную алгебру); 2) логические модальности определяют через доказуемость, недоказуемость и т. д. формул логического исчисления (классического или другого исчисления высказываний, системы строгой или сильной импликации и т. п.).

Пусть символы

$$LN \quad \text{и} \quad LM$$

читаются соответственно как «логически необходимо» и «логически возможно». Примем утверждения:

$A1.\ IN|\sim(x\cdot\sim x)|$

$A2.\ (X \vdash Y) \cdot LN|x| \to LN|y|$

$A3.\ LM|x| \equiv \neg LN|\sim x|$

$A4.\ \neg LM|x| \equiv LN|\sim x|.$

Примем также определения:

*D1.* Событие логически необходимо только в силу *A1* и *A2* (в остальных случаях оно ненеобходимо).

*D2.* Событие логически возможно только в силу *A3* и логически невозможно только в силу *A4*.

Отношение логических модальностей и модальностей вообще определяется утверждениями:

$A5.\ LN|x| \vdash N|x|$

$A6.\ M|x| \vdash LM|x|$

$A7.\ \sim (N|x| \vdash LN|x|)$

$A8.\ \sim (LM|x| \vdash M|x|).$

## § 5. Значение модальных предикатов

В большом числе случаев, когда модальные знаки употребляются, без них в принципе можно обойтись,— они сводятся к другим знакам. Так, в некоторых случаях $M|s \leftarrow PX|$ есть замена $(\exists s)X$. Однако, есть случаи, когда модальные знаки не могут быть заменены никакими другими, когда они выполняют специфическую, свойственную только им роль.

В этой специфической роли они появляются прежде всего тогда, когда приходится иметь дело с прогнозами относительно будущих событий, наступление или ненаступление которых зависит от стечения обстоятельств. Общая схема введения модальных предикатов для таких случаев может быть описана таким образом.

Пусть имеются знания: 1) если наступает событие $|y^1 \cdot \ldots \cdot y^n|$, то (вслед за этим, через такое-то время и т. п.) наступает событие $|x|$; 2) если наступает событие $|z^1 \cdot \ldots \cdot z^m|$, то не наступает событие $|x|$. Упрощая дело: 1) если $Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n$, то $X$; 2) если $Z^1 \cdot \ldots \cdot Z^m$, то $\sim X$. Первое пусть будет $V$, второе — $W$. Каждое из $|y^1|, \ldots, |y^n|$ будем называть обстоятельством, способствующим наступлению $|x|$, а каждое из $|z^1|, \ldots |z^m|$ — препятствующим.

Для осуществления прогнозов научным путем (в отличие от предположений и догадок, не имеющих логических оснований) требуется следующее: 1) знания типа $V$ и $W$; 2) знание о данной, наличной ситуации (обозначим $U$). Знания $V$ и $W$ назовем критериями прогнозов, а $U$ — базой прогнозов. Характер прогнозов зависит от характера $V$, $W$ и $U$.

Если критерии прогноза даны, то характер прогноза зависит от его базы, т. е. от $U$. Здесь возможны различные случаи (если даже допустить, что мы можем данную ситуацию описать сколь угодно полно без ошибок): 1) имеются все благоприятные обстоятельства; 2) имеются все препятствующие обстоятельства; 3) имеются некоторые благоприятные, нет препятствующих; 4) имеются некоторые препятствующие, нет благоприятных; 5) имеются некоторые благоприятные и некоторые препятствующие. Логически исключается лишь случай, когда имеются все благоприятствующие и все препятствующие обстоятельства, т. е.

$$\sim(Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n \cdot Z^1 \cdot \ldots \cdot Z^m).$$

При осуществлении прогнозов, естественно, требуются какие-то знаки, которые в обобщенной форме фиксировали бы характер базы прогноза. Это и выполняют модальные знаки: 1) если даны все благоприятствующие обстоятельства, то событие необходимо (в этих координатах); 2) если даны все препятствующие обстоятельства, то событие невозможно; 3) прочие промежуточные варианты (различные сочетания благоприятных и препятствующих обстоятельств) дают прочие возможные варианты модальной оценки событий.

Обращаем внимание на то, что указанная схема не гарантирует во всех случаях истинные результаты. Это — схема введения модальных знаков, и ничего более. В достаточно большом числе случаев по этой схеме получаются удовлетворительные результаты, и это — эмпирический факт. Это оправдывает риск и, во всяком случае, раскрывает значение модальных знаков. А истинность результатов в том или ином случае зависит от точности критериев прогноза, от их эффективности, от точности и полноты базы прогноза, от опыта делающих прогнозы и т. п.

Мы привели идеальную схему. На деле же все обстоит сложнее. На деле возможно, что одни и те же обстоятельства попадают в число благоприятных и неблагоприятных, что число критериев прогноза больше двух и между ними имеются сложные взаимоотношения, что данная ситуация сама меняется, база прогноза недостаточно полна, что проводятся логические рассуждения, делаются допущения и т. п. Но при всех этих обстоятельствах несомненно одно: модальные предикаты суть сокращенное обозначение некоторых типов базы прогноза относительно соответствующих критериев прогноза. Так что (подобно предикату $E$) здесь нельзя выбрать предметы, находящиеся в соответствии с $M$, $N$ и т. д. Но можно указать тип базы и критериев прогноза, о котором идет речь в высказывании с $M$, $N$ и т. д.

К прошлым и настоящим событиям точно так же применяют модальные оценки. Но это имеет смысл исключительно ретроспективно: мы как бы переносим себя во время, когда не было интересующего нас события или еще не наступила ситуация, в которой произошло некоторое событие, и переносим критерии прогноза; в зависимости от того, какая получается при этом база прогноза, дается и модальная оценка наступления или ненаступления события. Этим объясняется то, что не все существующие или существовавшие события оцениваются как необходимые и не все неосуществившиеся в прошлом оцениваются как невозможные. Однако модальным оценкам прошлых и настоящих событий в науке придают весьма небольшое значение.

## § 6. Модальность индивидуальных и повторяющихся событий

Отыскание критериев прогноза есть построение знаний, касающихся классов событий независимо от того, имеют дело с повторяющимися или индивидуальными событиями. Последние так или иначе рассматриваются (часто в неявной форме) как представители каких-то классов. Разница состоит лишь в условиях, при которых приходится вырабатывать критерии прогнозов: в одном случае повторение событий облегчает познание, во втором же приходится прибегать к каким-то средствам, компенсирующим неповторимость (аналогии, более широкие обобщения и т. п.).

## § 7. Логические свойства модальных предикатов

Модальные высказывания обладают свойствами, которые определяются следующей системой утверждений.

Утверждения *A1*:

a) $N|x| \equiv \neg M|\sim x|$

b) $\neg N|x| \equiv M|\sim x|$

c) $?N|x| \equiv ?M|\sim x|$

Следствия из *A1*:

$T1.\ M|x| \equiv \neg N|\sim x|$

$T2.\ \neg M|x| \equiv ?N|\sim x|$

$T3.\ ?M|x| \equiv ?N|\sim x|$

Утверждения *A2*:

a) $\sim M|x| \equiv \neg M|x| : ?M|x|$

b) $\sim \neg M|x| \equiv M|x| : ?M|x|$

c) $\sim ?M|x| \equiv M|x| : \neg M|x|$

Следствия из *A2*;

$T4.\ \sim N|x| \equiv \neg N|x| : ?N|x|$

$T5.\ \sim \neg N|x| \equiv N|x| : ?N|x|$

$T6.\ \sim ?N|x| \equiv N|x| ; \neg N|x|$

Если $\sim ?M|x|$, т. е. исключена неопределенность, то
$\sim M|x| \equiv \neg M|x|$
$\sim \neg M|x| \equiv M|x|$.

Но это — частный случай. В общем же случае

$$\sim(\sim \neg M|x| \vdash M|x|).$$

Аналогично для *N*.

Утверждения *A3*:

a) $N|x| \vdash X$

b) $X \vdash M|x|$

c) $(X \vdash Y) \rightarrow (M|x| \vdash M|y|) \cdot (N|x| \vdash N|y|$.

d) $(X \vdash Y) \rightarrow (\neg M|y| \succ \neg M|x|) \cdot (\neg N|y| \succ \succ \neg N|x|)$.

e) $(X \dashv Y) \to (?M\,|y| \succ ?M\,|x|) \cdot (?N\,|y| \succ$
$\succ ?N\,|x|)$.

Следствия из $A3$:

$T7.$ $\neg M\,|x| \vdash \sim X$, $\sim X \vdash \neg N\,|x|$
$T8.$ $N\,|x| \vdash M\,|x|$, $\neg M\,|x| \vdash \neg N\,|x|$'
$\sim M\,|x| \vdash \sim N\,|x|$
$T9.$ $\neg LM\,|x| \vdash \neg M\,|x|$, $\neg N\,|x| \vdash \neg LN\,|x|$,
$T10.$ $\neg M\,|x^1| \succ \neg M\,|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$
$\neg N\,|x^1| \succ \neg N\,|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$
$?M\,|x^1| \succ ?M\,|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$
$?N\,|x^1| \succ ?N\,|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$
$T11.$ $N\,|x^1 \cdot \ldots x^n| \vdash N\,|x^1|$
$M\,|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n| \vdash M\,|x^1|$
$T12.$ $\sim (N\,|x| \cdot N\,|\sim x|)$, $\sim (N\,|x^1 \cdot x^2| \cdot N\,|\sim x^1 \cdot x^2|)$.

**Утверждения** $A4$:

a) $\sim (M\,|x| \cdot \neg M\,|x|)$, $\sim (N\,|x| \cdot \neg N\,|x|)$
b) $\sim (M\,|x| \cdot ?M\,|x|)$, $\sim (N\,|x| \cdot ?N\,|x|)$
c) $\sim (\neg M\,|x| \cdot ?M\,|x|)$, $\sim (\neg N\,|x| \cdot ?N\,|x|)$

Следствия из $A4$:

$T\,13.$ $M\,|x| \dashv\vdash \sim \neg M\,|x| \cdot \sim ?M\,|x|$
$\neg M\,|x| \dashv\vdash \sim M\,|x| \cdot \sim ?M\,|x|$
$?M\,|x| \dashv\vdash \sim M\,|x| \cdot \sim \neg M\,|x|$
$T\,14.$ $N\,|x| \dashv\vdash \sim \neg N\,|x| \cdot \sim ?N\,|x|$
$\neg N\,|x| \dashv\vdash \sim N\,|x| \cdot \sim ?N\,|x|$
$?N\,|x| \dashv\vdash \sim N\,|x| \cdot \sim \neg N\,|x|$
$T\,15.$ $M\,|x| : \neg M\,|x| : ?M\,|x|$
$T\,16.$ $N\,|x| : \neg N\,|x| : ?N\,|x|$.

Прежде чем сформулировать утверждения для событий $|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$ и $|x^1 : \ldots : x^n|$, сделаем два предварительных замечания. Надо выражения $|x^1 \cdot \ldots \cdot x^n|$ и $|x^1 : \ldots : x^n|$ отличать от выражений $|x^1| \cdot \ldots \cdot |x^n$ и $|x^1| : \ldots : |x^n|$... Лишь первые суть (по соглашению) термины событий, вторые же суть термины, производные от терминов событий. Они не совпадают по смыслу. Мы будем иметь в виду исключительно первые. Интуитивно ясно, далее, что утверждения

$$M \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot M \mid x^n \mid \vdash M \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid$$

$$\neg N \mid x^1 \mid : \ldots : \neg N \mid x^n \mid \vdash \neg N \mid x^1 : \ldots : x^n \mid$$

не всегда правомерны. Это накладывает известные ограничения, влияющие на характер принимаемых ниже утверждений $A5$ и $A6$.

Утверждения $A5$:

$a)$ $M \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot M \mid x^n \mid \vdash M \mid x^1 \vee \ldots \vee x^n \mid$

$b)$ $N \mid x^1 \mid \cdot M \mid x^2 \mid \vdash M \mid x^1 \cdot x^2 \mid$

$N \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot N \mid x^{n-1} \mid \cdot M \mid x^n \mid \vdash M \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid$

$d)$ $N \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot N \mid x^n \mid \vdash N \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid$

$d)$ $\neg N \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \dashv\vdash \neg N \mid x^1 \mid \vee \ldots \vee \neg N \mid x^n \mid$

$e)$ $?N \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \dashv\vdash (?N \mid x^1 \mid \vee \ldots \vee ?N \mid x^n \mid) \cdot$
$\cdot \sim \neg N \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot \sim \neg N \mid x^n \mid$

$f)$ $\neg M \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \dashv\vdash \neg M \mid x^1 \mid \vee \ldots \vee \neg M \mid x^n \mid$

$g)$ $?M \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \dashv\vdash (?M \mid x^1 \mid \vee \ldots \vee ?M \mid x^n \mid) \cdot$
$\cdot \sim \neg M \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot \sim \neg M \mid x^n \mid$

Утверждения

$T\,17.$ $M \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \vdash M \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot M \mid x^n \mid$

$T\,18.$ $N \mid x^1 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \vdash N \mid x^1 \mid \cdot \ldots \cdot N \mid x^n \mid$

суть следствия $A\,3$.

Утверждения $A\,6$:

$a)$ $N \mid x^1 \mid : \ldots : N \mid x^n \mid \vdash N \mid x^1 : \ldots : x^n \mid$

$b)$ $N \mid x^1 \mid : \ldots : N \mid x^{n-1} \mid : M \mid x^n \mid \vdash M \mid x^1 : \ldots : x^n \mid$.

Примем сокращающие обозначения: 1) $Y^1, \ldots, Y^m$ — всевозможные высказывания, отличающиеся от $(X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$ тем и только тем, что по крайней мере перед одним из $X^1, \ldots, X^n$ имеется один и только один знак $\sim$; 2) $Z^1, \ldots, Z^k$ — всевозможные высказывания, в число которых входит $(X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него тем и только тем, что перед каждым из $X^1, \ldots, X^n$ или перед $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из них имеется один и только один знак $\sim$; 3) $V^1, \ldots, V^n$ — всевозможные высказывания $(X^1\cdot\sim X^2\cdot\ldots\cdot\sim X^n)$, $(X^2\cdot\sim X^1\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot\sim X^n)$, $\ldots$, $(X^n\cdot\sim X^1\cdot\ldots\cdot\sim X^{n-1})$.

Следствия из ранее принятых утверждений:

*T 19*. $N\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash N\mid v^1\mid:\ldots:N\mid v^n\mid$
*T 20*. $\neg N\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash M\mid z^1\mid\vee\ldots\vee M\mid z^k\mid$
*T 21*. $?N\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash ?M\mid z^1\mid\vee\ldots\vee ?M\mid z^k\mid$
*T 22*. $M\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash M\mid v^1\mid\vee\ldots\vee M\mid v^n\mid$
*T 23*. $\neg M\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash N\mid z^1\mid:\ldots:N\mid z^k\mid$
*T 24*. $?M\mid x^1:\ldots:x^n\mid\dashv\vdash ?M\mid v^1\mid\vee\ldots\vee ?M\mid v^n\mid$
*T 25*. $\neg N\mid x^1:\ldots:x^n\mid\vdash\neg N\mid v^1\mid\cdot\ldots\cdot\neg N\mid v^n\mid$
*T 26*. $M\mid v^1\mid\cdot\ldots\cdot M\mid v^n\mid\vdash M\mid x^1:\ldots:x^n\mid$
*T 27*. $N\mid x^1\cdot\ldots\cdot x^n\mid\dashv\vdash\neg M\mid y^1\mid\cdot\ldots\cdot\neg M\mid y^m\mid$
*T 28*. $\neg N\mid x^1\cdot\ldots\cdot x^n\mid\dashv\vdash M\mid y^1\mid\vee\ldots\vee M\mid y^m\mid$
*T 29*. $?N\mid x^1\cdot\ldots\cdot x^n\mid\dashv\vdash ?M\mid y^1\mid\vee\ldots\vee ?M\mid y^m\mid$
*T 30*. $\neg M\mid x^1\cdot\ldots\cdot x^n\mid\dashv\vdash N\mid y^1\mid\vee\ldots\vee N\mid y^m\mid$
*T 31*. $?M\mid x^1\cdot\ldots\cdot x^n\mid\dashv\vdash ?N\mid y^1\mid\vee\ldots\vee ?N\mid y^m\mid$
*T 32*. $M\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash M\mid x^1\mid\vee\ldots\vee M\mid x^n\mid$
*T 33*. $N\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash N\mid x^1\mid\vee\ldots\vee N\mid x^n\mid$
*T 34*. $\neg M\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash\neg\mid M x^1\mid\cdot\ldots\cdot\neg M\mid x^n\mid$
*T 35*. $\neg N\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash\neg\mid N x^1\mid\cdot\ldots\cdot\neg N\mid x^n\mid$
*T 36*. $?M\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash ?M\mid x^1\mid\vee\ldots\vee ?M\mid x^n\mid$
*T 37*. $?N\mid x^1\vee\ldots\vee x^n\mid\dashv\vdash ?N\mid x^1\mid\vee\ldots\vee ?N\mid x^n\mid$

Примем, наконец, утверждение:

*A 7*. $Mod\mid s\alpha\leftarrow P\mid\dashv\vdash Mod\mid s\alpha\downarrow P\leftarrow E\mid$,

где $Mod$ есть любой из $M$, $N$, $\neg M$, $\neg N$, $?M$, $?N$.

## § 8. Случайность

Обозначения:

1) $C\mid x\mid$ — «$\mid x\mid$ случайно»;
2) $\neg C\mid x\mid$ — «$\mid x\mid$ не случайно»;
3) $?C\mid x\mid$ — «Нельзя установить, $C\mid x\mid$ или $\neg C\mid x\mid$».

Свойства предиката $C$ определяются утверждениями:

*A 1*. $C\mid x\mid\equiv M\mid x\mid\cdot M\mid\sim x\mid$
*A 2*. $\neg C\mid x\mid\equiv M\mid x\mid\cdot\neg M\mid\sim x\mid$
*A 3*. $?C\mid x\mid\equiv M\mid x\mid\cdot ?M\mid\sim x\mid$

$A\,4.\ \sim C\mid x\mid\ \equiv\ \neg C\mid x\mid : ?C\mid x\mid$
$A\,5.\ \sim\neg C\mid x\mid\ \equiv\ C\mid x\mid : ?C\mid x\mid$
$A\,6.\ \sim ?C\mid x\mid\ \equiv\ C\mid x\mid :\neg C\mid x\mid$

Следствия $A_1 - A_6$:

$T\,1.\ \alpha C\mid x\mid\ \vdash M\mid x\mid$
$T\,2.\ C\mid x\mid\ \vdash\neg N\mid x\mid,\ \neg C\mid x\mid\ \vdash N\mid x\mid,$
$?C\mid x\mid\ \vdash ?N\mid x\mid$
$T\,3.\ N\mid x\mid\ \dashv\vdash\neg C\mid x\mid$

Однако, $\neg N\mid x\mid$ и $C\mid x\mid$ не совпадают; не совпадают также $?N\mid x\mid$ и $?C\mid x\mid$.

## § 9. Модальность и существование

Пусть $X$ есть любое из высказываний $(s^1,\dots,s^n)\,\alpha\leftarrow P$ и $\sim((s^1,\dots,s^n)\,\alpha\leftarrow P)$, где $n\geqslant 1$, а $s^i$ и $s^k$ — любые из $s^1,\dots,s^n$. Высказывания «Возможен (необходим, невозможен и т. п.) $s^i$ такой, что $X$», «Возможен $s^i$ и необходим $s^k$ такие, что $X$» и т. п. будем изображать символами

$$(Mod\ s^i)\,X,\ (Mod^1\,s^i)\ (Mod^2\,s^k)\,X,\ (Mod^1\,s^1)\dots(Mod^n\,s^n)\,X.$$

Свойства этих высказываний определяются утверждениями:

$A\,1.\ (Mod\,s^i)\,X\equiv Mod\mid s^i\downarrow P\,X\leftarrow E\mid$
$A\,2.\ (Mod^1\,s^i)\,(Mod^2\,s^k)\,X\equiv(Mod^1\,s^i)\,X\cdot(Mod^2\,s^k)\,X$
$(Mod^1 s^1)\dots(Mod^k s^k)\,X\equiv(Mod^1\,s^1)\,X\cdot\ldots\cdot(Mod^k\,s^k)\,X$
$(Mod^1 s^n)\dots(Mod^n s^n)\,X\equiv(Mod^1 s^1)\,X\cdot\ldots\cdot(Mod^n\,s^n)X$
$A\,3.\ (Mod\,(s^i,s^k))\,X\equiv(Mod\,s^i)\,(Mod\,s^k)\,X$
$(Mod\,(s^1,\dots,s^k))\,X\equiv(Mod\,s^1)\dots(Mod\,s^k)\,X$
$(Mod\,(s^1,\dots,s^n))\,X\equiv(Mod\,s^1)\dots(Mod\,s^n)\,X.$

Очевидно, что

$T\,1.\ (Mod^1\,s^i)\,(Mod^2\,s^k)\,X\dashv\vdash(Mod^2\,s^k)\,(Mod^1\,s^i)\,X$
$T\,2.\ (Mod\,(s^i,s^k))\,X\dashv\vdash(Mod\,(s^k,s^i))\,X.$

Согласно приведенным определениям получаются высказывания, похожие на высказывания с кванторами. Но если для кванторов допустимы любые комбинации $\alpha Ӵ^1$ и $\beta Ӵ^2$ в $(\alpha Ӵ^1 t^1)(\beta Ӵ^2 t^2)X$, то для модальных знаков некоторые комбинации $Mod^1$ и $Mod^2$ исключаются. Это исключение определяется утверждением:

*A 4.* $(Mod\, s^i)\, X \vdash (Mod\, s^k)\, X.$

Следствия из *A1 — A4*:

*T 3.* $\sim((M\, s^i)(\urcorner Ms^k)\, X)$;

аналогично для пар $N$ и $\urcorner N$, $N$ и $\urcorner M$, $M$ и $?\ M$, $N$ и $?\ N$, $N$ и $?\ M$. Не исключаются лишь такие комбинации $Mod^1$ и $Mod^2$, для которых имеет силу какое-либо из утверждений

$$(Mod^1\, s^i)\, X \vdash (Mod^2\, s^i)\, X,\ (Mod^2\, s^i)\, X \vdash (Mod^1\, s^i)\, X,$$
$$(Mod^1\, s^k)\, X \vdash (Mod^2\, s^k)\, X,\ (Mod^2\, s^k)\, X \vdash (Mod^1\, s^k)\, X.$$

## § 10. Модальность высшего порядка

Расширим понятие события, приняв следующее определение:

1) если $X$ есть категорическое высказывание, то $|\,x\,|$ есть термин события;

2) если $|\,x\,|$ есть термин события, то $\|\,x\,|\downarrow Mod\,|$ есть термин события, где $Mod$ есть любой из $\alpha N$ и $\alpha M$;

3) если $|\,x\,|$ есть термин события, то $|\,Mod\,|\,x\,\|$ есть термин события.

Термины, указанные в пункте 2 и 3, не тождественны по смыслу. Для первых имеет силу утверждение:

*A 1.* $Mod \,\|\,x\,|\downarrow Mod\,|$ .

Следствия из *A1*:

*T 1.* $\sim(\alpha M\,\|\,x\,|\downarrow \beta M|)$

*T 2.* $\sim(\alpha N\,\|\,x\,|\downarrow \beta N\,|)$,

где $\alpha$ и $\beta$ различны. Для вторых имеют силу утверждения:

*A 2.* $M\,|\,M\,|\,x\,\| \vdash M\,|\,x\,|$

*A 3.* $\mathrm{N}\,|\,x\,| \vdash N\,|\,N\,|\,x\,\|.$

Следствия из *A2* и *A3*:

*T 3.* $M\,|\,N\,|\,x\,\| \vdash M\,|\,x\,|$

*T 4.* $N\,|\,M\,|\,x\,\| \vdash M\,|\,x\,|$ .

Приведенные утверждения могут быть использованы в рассуждениях. Пусть, например, даны $Y \vdash M|x|$ и $M|y|$. Согласно $A3$XI 7 $M|y| \vdash M|M|x||$. Поскольку $M|M|x|| \vdash M|x|$, по транзитивности следования получаем $M|y| \vdash M|x|$. Так как $M|y|$ истинно, то и $M|x|$ истинно. Построить такое рассуждение без $A2$ невозможно.

## § 11. Модальность и кванторы

Между кванторами и модальными знаками имеется сходство: утверждениям

$$N|x| \equiv \neg M|\sim x|, \quad N|x| \vdash X$$

и т. п. соответствуют утверждения

$$(\forall s)X \equiv (\neg \exists s) \sim X, \qquad (\forall s)X \vdash X$$

и т. п. Имеется связь: например, если $s$ свободен в $X$, то

$$(\exists s)X \vdash M|x|.$$

В ряде случаев они употребляются совместно в высказываниях

$$(\alpha \rangle\!\langle s^1)(Mod\, s^2)X \qquad \text{и} \qquad Mod|(\alpha \rangle\!\langle s)X|.$$

Для совместного их употребления имеют силу утверждения:

$A1.$ $(\alpha \rangle\!\langle s^1)(Mod\, s^2)X \equiv (\alpha \rangle\!\langle s^1)((Mod\, s^2)X)$

$A2.$ $Mod|(\alpha \rangle\!\langle s)X| \equiv (\alpha \rangle\!\langle s)(Mod|x|)$.

## § 12. Модальности и следование

Имеется традиция связывать модальности с понятием логического следования (начиная с Льюиса). При этом следование определяют через модальные понятия или наоборот. Конечно, с помощью понятия следования можно определить логические модальности и указать, как получаются в отдельных случаях модальные высказывания вообще. Но это ни в коем случае не означает того, что модальные понятия определяются через понятие следования. Что же касается определений следования через модальные понятия, то они вообще несостоятельны. Здесь нет надобности подробно развивать аргументацию в пользу нашего заявления: ее легко усмотреть в изложенных выше соображениях. Ограничимся лишь следующим дополнением к ним.

Пересмотрев всевозможные отношения высказываний с $Mod$ и $\vdash$ (а также со знаком ослабленного следования), мы лишь в одном единственном случае получим положительный результат:

$$A\,1.\ M \mid x \cdot \sim y \mid \to \sim (X \vdash Y),\ (X \vdash Y) \to \neg M \mid x \cdot \cdot \sim y \mid .$$

В остальных же случаях результат запишется отрицательными утверждениями:

$$\sim ((X \vdash Y) \to M \mid x \cdot y \mid ), \sim (\mathrm{N} \mid x \cdot y \mid \to (X \vdash Y))$$

и т. п. Даже в том случае, который послужил основой для определения следования, результат отрицателен. А именно: «Если $\neg M|x \cdot \sim y|$, то из этого не следует, что $X \vdash Y$». В самом деле, $\neg M|x \cdot \sim x \cdot \sim y|$; однако $\sim (X \cdot \sim X \vdash Y)$ и $\sim (\sim Y \vdash \sim (X \cdot \sim X)))$. Определение логического следования $Y$ из $X$ как $\neg M|x \cdot \sim y|$ означает признание правомерными утверждений вида «Из $X \cdot \sim X$ логически следует $Y$» и «Из $Y$ логически следует $\sim (X \cdot \sim X)$», т. е. «парадоксов строгой импликации», поскольку $\neg M|x \cdot \sim x|$ и $N| \sim (x \cdot \sim x)|$.

## § 13. Языковые трансформации

Встречаются языковые трансформации высказываний, определяемые утверждением:

$$A\,1.\ s\,Mod\,\alpha \leftarrow P \equiv Mod \mid s\,\alpha \leftarrow P \mid .$$

Пример для $sMod\alpha \leftarrow P$: «Студент может не сдать экзамен» (что тождественно по смыслу с «Возможно, что студент не сдаст экзамен»).

## § 14. Термины

Встречаются предикаты, смысл которых определяется (явно или неявно) утверждениями типа

$$s\,\alpha \leftarrow Q \equiv Mod \mid s\,\alpha \leftarrow P \mid$$

$$s^i\,\alpha \leftarrow Q \equiv Mod \mid (s^1, \ldots, s^n)\,\alpha \leftarrow P \mid$$

$$(s^i, \ldots, s^k)\,\alpha \leftarrow Q \equiv Mod \mid (s^1, \ldots, s^n)\,\alpha \leftarrow P \mid .$$

Примеры такого рода предикатов: «растворим в воде», «теплопроводен», «светонепроницаем» и т. п.

Особый интерес здесь представляют предикаты, фиксирующие потенциальные признаки (т. е. случай, когда $Mod$ есть $M$, а $\alpha$ пусто). Пусть, например, признаки $P^1$ и $P^2$ таковы, что

$$\sim ((s \leftarrow P^1) \cdot (s \leftarrow P^2)) \cdot M \mid s \leftarrow P^1 \mid \cdot M \mid s \leftarrow P^2 \mid .$$

Примем определения:

$$s \leftarrow Q^1 = Df.\ M \mid s \leftarrow P^1 \mid \quad \text{и} \quad s \leftarrow Q^2 = Df.\ M \mid s \leftarrow P^2 \mid .$$

Согласно условию и определениям будет истинно утверждение

$$(s \rightarrow Q^1) \cdot (s \leftarrow Q^2).$$

Например, одно и то же тело нельзя охладить до минус 20° и в то же время нагреть до плюс 20°; однако, встречаются тела, которые охлаждаемы до минус 20° и нагреваемы до плюс 20°. Иногда подобные потенциальные предикаты создают видимость правомерности логических противоречий.

## § 15. Значения истинности

Пусть $Mod$ есть любой из $M$ и $N$.

*D1.* $[\alpha Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1$, если и только если на самом деле $\alpha Mod \mid x \mid$. А это «на самом деле» может означать соответствие $\alpha Mod$ данной базе и критериям прогноза, принятой в данной науке модальной классификации событий и т. п.

$$\begin{aligned} D2.\quad & ]Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^4 \equiv [\neg Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1 \\ & [\neg Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^4 \equiv [Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1 \\ & [?\,Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^4 \equiv ([Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1) : \\ & : ([\neg Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1) \\ D3.\quad & [Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^2 \equiv [?\,Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1 \\ & [\neg Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^2 \equiv [?\,Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1 \\ D4.\quad & [\alpha\, Mod \mid x \mid\ ] \leftarrow v^3 \equiv [\sim M \mid s \leftarrow E \mid\ ] \leftarrow v^1. \end{aligned}$$

Значения истинности для прочих случаев устанавливаются в соответствии с ранее принятыми утверждениями и определениями. Например,

$$[N \mid x \cdot y \mid\ ] \leftarrow v^1 \dashv\vdash ([N \mid x \mid\ ] \leftarrow v^1) \cdot ([N \mid y \mid\ ] \leftarrow v^1).$$

Высказывания $aMod\,|x|$ невозможно представить как функции истинности от $X$. Во-первых, в двузначной логике вообще нет такой одноаргументной функции. В многозначной (трех и более значной) логике возможны одноаргументные функции $X$, интерпретация которых как $aMod\,|x|$ удобна в качестве эвристического средства исследования некоторых свойств модальных высказываний (например, для определения класса тавтологий). Но это не есть описание путей установления значений истинности модальных высказываний.

Возьмем, например, высказывание $M\,|s \leftarrow P\,|$. Если $|s \leftarrow P] \leftarrow v^1$, то $[M\,|\,s \leftarrow P\,|] \leftarrow v^1$. Но это имеет место не в силу определения $[M\,|s \leftarrow P\,|] \leftarrow v^1$, а в силу утверждения $X \vdash M|x|$, где в $X$ не входит $M$. Во всех остальных случаях значение истинности $M\,|\,P\,|$ остается неизвестным: зная только то, что $[s \leftarrow P] \rightarrow v^2$, $v^3$ или $v^4$, мы еще ничего не можем сказать о значении истинности $M\,|\,s \leftarrow P|$. Здесь возможны самые различные сочетания: возможно, что $[s \leftarrow P] \leftarrow v^4$, а $[M\,|s \leftarrow P|] \leftarrow v^2$; что $[s \leftarrow P] \leftarrow v^4$, а $[M\,|\,s \leftarrow P\,|] \leftarrow v^1$; возможно, что $[s \leftarrow P] \leftarrow v^4$ и $[M\,|\,s \leftarrow P\,|] \leftarrow v^4$ и т. д. Аналогично для $N$. Только в одном случае можно по значению истинности $X$ судить о значении истинности $N\,|\,x\,|$, да и то в чисто негативной форме:

$$([X] \urcorner \leftarrow v^1) \rightarrow ([N\,|\,x\,|\,] \urcorner \leftarrow v^1).$$

## § 16. Вероятность

Возможности событий различаются:

1) топологически (одно событие более или менее возможно, чем другое, или также возможно, как другое);

2) по величине.

*D1.* Величина (степень) возможности события называется вероятностью события. Вероятность $|\,x\,|$ будем записывать символом

$$p\,|\,x\,|.$$

Принято вероятности изображать числами от 0 до 1. Вероятности приписываются событиям по определенным правилам, которые специально изучаются в математической теории вероятностей. В рамках логики свойства вероятностей можно определить утверждениями:

*A1.* $(p\,|\,x\,| = 0) \equiv \urcorner M\,|\,x\,|$

$A2.\ (p \mid x \mid\ = 1) \equiv \neg M \mid \sim x \mid$

$A3.\ (0 < p \mid x \mid \leqslant 1) \equiv M \mid x \mid$

$A4.\ (0 \leqslant p \mid x \mid\ < 1) \equiv M \mid \sim x \mid$

$A5.\ p \mid \sim x \mid\ = 1 - p \mid x \mid$

$A6.\ p \mid x^1 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^n \mid \leqslant min(p \mid x^1 \mid, p \mid x^2 \mid, \ldots, p \mid x^n \mid)$

$A7.\ p \mid x : y \mid \geqslant max(min(p \mid x \mid, 1 - p \mid y \mid), min(p \mid y \mid, 1 - p \mid x \mid))$

$$p \mid x^1 : x^2 : \ldots : x^n \mid \geqslant max(min(p \mid x^1 \mid, 1 - p \mid x^2 \mid, \ldots, 1 - p \mid x^n \mid), \ldots, min(p \mid x^n \mid, 1 - p \mid x^1 \mid, \ldots, 1 - p \mid x^{n-1} \mid)).$$

В логико-философской литературе часто говорят о различных понятиях вероятности. Это словоупотребление не вполне корректно. Понятие вероятности одно. Различны способы нахождения вероятностей. Известны методы равных возможностей и частотный.

В случае прогнозов относительно наступления индивидуальных событий используется метод «взвешивания» обстоятельств, благоприятствующих и препятствующих наступлению события. При этом всем упомянутым обстоятельствам могут быть приписаны какие-то числа и затем из их отношения вычислена вероятность интересующего исследователя события. Пусть, например, число $\alpha$ есть сумма всех чисел, приписанных всем обстоятельствам «за» («вес» этих обстоятельств), а $\beta$ — сумма чисел, приписанных обстоятельствам «против». Тогда вероятность события будет равна $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Обычно это делают неявно, ограничиваясь более грубыми оценками «больше», «меньше», «намного больше» и т. п.

## § 17. Нормативные высказывания

Нормативные высказывания суть высказывания о разрешенности, запрещенности или обязательности осуществления или неосуществления действий. При этом предполагается: 1) тот, кто разрешает, обязывает или запрещает осуществлять или не осуществлять те или иные действия; 2) тот, кому разрешено, запрещено или вменено в обязанность осуществлять или неосуществлять эти действия; 3) действия субъективно свободны, т. е. возможно как осуществление их, так и неосуществление (например, бесмысленно запрещать или разрешать ходить загорать на Солнце, делать вечные двигатели т. п.).

Примем обозначения

1) $a$, $a^1$, $a^2$, ... — названия действий;
2) $|a|$ — «осуществление действия $a$»;
3) $|\sim a|$ — «неосуществление действия $a$»;
4) $|b|$ — $|a|$ или $|\sim a|$; аналогично $|b^1|$, $|b^2|$, ...;
5) $D|b|$ — «$|b|$ разрешено»;
6) $\neg D|b|$ — «$|b|$ запрещено»;
7) $?D|b|$ — «$|b|$ безразлично» ($|b|$ не включено в число разрешенных и в число запрещенных):
8) $B|b|$ — «$|b|$ обязательно»;
9) $\neg B|b|$ — «$|b|$ необязательно»;
10) $?B|b|$ — $|\sim b|$ безразлично».

Теперь высказывания

$$\alpha H|a| \quad \text{и} \quad \alpha H|\sim a|,$$

где $H$ есть любой из $D$ и $B$, можно рассматривать как частный случай высказываний $s\alpha \leftarrow P$, в которых субъекты суть $|a|$ и $|\sim a|$, а предикаты суть $D$ и $B$. Необходимо лишь сделать некоторые дополнения, связанные с частными особенностями этих терминов.

*A 1.* $|\sim\sim b| \equiv |b|$

*A 2.* $B|b| \equiv \neg D|\sim b|$, $\neg B|b| \equiv D|\sim b|$, $?B|b| \equiv$
$\equiv ?D|\sim b|$

*A 3.* $\alpha H|b^1\cdot\ldots\cdot b^n| \equiv \alpha H|b^1|\cdot\ldots\cdot\alpha H|b^n|$
$H|b^1:\ldots:b^n| \equiv \alpha H|b^1|:\ldots:\alpha H|b^n|$

*A 4.* $B|b| \vdash D|b|$, $\neg D|b| \vdash \neg B|b|$.

Имеется некоторая аналогия $D$ и $B$, с одной стороны, и $M$ и $N$, с другой. Например,

$$B|b| \vdash D|b| \text{ и } N|x| \vdash M|x|$$

$$B|b| \equiv \neg D|\sim b| \text{ и } N|x| \equiv \neg M|\sim x|$$

и т. п. Но эта аналогия лишь частичная. Так, для $D$ и $B$ неверны утверждения, аналогичные

$$N|x| \vdash X \text{ и } X \vdash M|x|.$$

В самом деле, действие может быть обязательным, но из этого не следует, что оно осуществлено; действие может быть осуществлено, но это не означает, что оно разрешено. Как известно, нормы нарушаются не менее часто, чем соблюдаются.

Для каждого действия $a$ может быть найдено такое $X$ или такое $Y$ (или и то и другое), что:

$$\alpha H\,|a| \equiv (|a| \rightarrow X)$$

$$\alpha H\,|a| \equiv (|\sim a| \rightarrow Y),$$

где $X$ и $Y$ фиксируют последствия осуществления или неосуществления действия. В ряде случаев такое сведение нормативных высказываний к ненормативным происходит без указания конкретных последствий действий: просто предполагаются какие-то (плохие или хорошие, приятные или неприятные и т. п.) последствия.

## § 18. Актуальное и потенциальное

В определениях различного рода логических понятий могут встречаться $\exists$ и $M$. В зависимости от того, какой из этих знаков фигурирует в определении, получаются определения, содержащие выражения «экзистенциально» или «актуально» (для $\exists$) или «потенциально» (для $M$). Эти определения не равноценны, поскольку

$$\sim (M\,|x| \vdash (\exists s)\,X), \ \sim ((\neg \exists s)\,X \vdash \neg M\,|x|)$$

(где $s$ свободен в $X$).

Пусть $K^{\circ}t$ есть термин «Конечный подкласс $Kt$». Примем определения:

*D1*. $Kt$ актуально бесконечен, если

$$(\forall K^{0} t)\,(\exists t^{i})\,(\sim (t^{i} \in K^{0} t) \cdot (t^{i} \in K\,t)),$$

и потенциально бесконечен, если

$$(\forall K^{0} t)\,(M\,t^{i})\,(\sim (t^{i} \in K^{0} t) \cdot (t^{i} \in K\,t))\cdot$$

*D2*. $Kt$ актуально конечен, если

$$(\neg \forall K^{0} t)\,(\exists t^{i})\,(\sim (t^{i} \in K^{0} t) \cdot (t^{i} \in K\,t)),$$

и потенциально конечен, если

$$(\neg \forall K^{0} t)\,(M\,t^{i})\,(\sim (t^{i} \in K^{0} t) \cdot (t^{i} \in Kt)).$$

## § 19. Условные модальности

Символом

$$Mod\,|x/y|$$

будем изображать то, что $Mod\,|x|$ при условии $|y|$.

*A 1.* $Mod^1|x/y| \cdot Mod^2|y| \vdash Mod^3|x|$,

где знакам $\urcorner|M$, $?M$, $?N$, $\urcorner|N$, $M$ и $N$ приписана числовая ценность соответственно 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а

$$Mod^3 = min\,(Mod^1,\ Mod^2).$$

## § 20. Предсказания

*D1.* Пусть во время $\delta^1$ событие $|x|$ не существует. Высказывание о том, что $|x|$ осуществится (будет существовать, произойдет, наступит) в будущем в какое-то или в определенное время после $\delta^1$, будем называть высказыванием о будущем событии или предсказанием $|x|$. Оно есть скрытое модальное высказывание $N|x|$.

Пусть $W$ есть предсказание $|x|$, высказанное во время $\delta^1$. Пусть $\delta^2$ есть время после $\delta^1$, указанное в $W$ (это может быть неопределенное «будет» или определенное время «после такого-то времени» «от... и до...» и т. п.). Надо различать вопрос о значениях истинности $W$ в $\delta^1$ и в $\delta^2$.

Первый вопрос решается определениями:

*D2.* $W$ истинно в $\delta^1$, если и только если имеется такое истинное $Y$, что $Y \rightarrow W$.

*D3.* $W$ ложно в $\delta^1$, если и только если имеется такое истинное $Z$, что $Z \rightarrow \sim W$.

*D4.* $W$ неопределенно в $\delta^1$, если и только если нет таких $Y$ и $Z$, какие указаны в *D2* и *D3*.

Второй вопрос решается определениями:

*D5.* $W$ истинно в $\delta^2$ (сбывается), если и только если $|x| \leftarrow E$ в $\delta^2$.

*D6.* $W$ ложно в $\delta^2$ (не сбывается), если и только если $|x| \urcorner\!\leftarrow E$ в $\delta^2$.

В идеальном случае между значениями истинности $W$ в $\delta^1$ и $\delta^2$ имеет место связь:

1) если $W$ истинно в $\delta^1$, то оно будет истинно и в $\delta^2$; если $W$ истинно в $\delta^2$, то оно не может быть ложно в $\delta^1$;

2) если $W$ ложно в $\delta^1$, то оно будет ложно и в $\delta^2$; если $W$ ложно в $\delta^2$, то оно не может быть истинно в $\delta^1$.

Однако, эти значения устанавливаются независимо друг от друга. Кроме того, из истинности (ложности) $W$ в $\delta^2$ не следует истинность (ложность) его в $\delta^1$: оно могло быть неопределенно.

Когда говорят, что некто, предсказавший некоторое событие, был прав в свое время, совершают логическую ошибку. Правомерно сказать в этом случае лишь то, что этот некто оказался прав (что предсказание сбылось). А это — совсем иное дело. Во многих случаях предсказания являются лишь неопределенными для своего времени, а их обоснование (т. е. отыскание $Y$) оказывается иллюзорным.

В этой связи не представляет труда разрешить известный «парадокс» с чужестранцем, попавшим в страну, в которой каждый чужестранец должен произнести высказывание и при этом за ложное высказывание казнят (чужестранец произнес фразу «Вы меня казните»).

Все сказанное о предсказаниях можно распространить с некоторыми коррективами на случаи, когда высказывания относятся к прошлым событиям ($\delta^2$ предшествует $\delta^1$).

# ОТНОШЕНИЯ

## § 1. Высказывания об отношениях

Среди высказываний с многоместными предикатами имеются такие, в которых нет частей, в свою очередь являющихся высказываниями. Они имеют структуру

$$s^1 R s^2 \text{ или } (s^1, \ldots, s^n) R$$

или могут быть приведены к такому виду путем языковых трансформаций, не меняющих их смысла. Например, высказывание «$a$ больше $b$ в два раза» благодаря такой трансформации примет вид «$a$ в два раза больше $b$», где выражение «в два раза больше» есть $R$. Эти высказывания, а также их внутренние отрицания

$$s^1 \neg R s^2 \text{ и } (s^1, \ldots, s^n) \neg R,$$

неопределенные формы

$$s^1 ?R s^2 \text{ и } (s^1, \ldots, s^n) ?R$$

и внешние отрицания мы называем высказываниями об отношениях или, короче, эр-высказываниями. То, о чем говорится в таких высказываниях, будем называть отношениями. Различие индексов у $R^1$, $R^2$,... будет означать, что отношения как-то различаются («больше», «дальше» и т. п.).

Обращаем внимание на то, что в эр-высказываниях $R$ есть часть высказывания, но не предикат. Например, в высказывании «$a$ больше $b$» слово «больше» есть $R$, а предикат $P$ будет иметь вид «первый больше второго».

Эр-высказывания суть частный случай высказываний, рассмотренных выше. Для них имеют силу соответствующие утверждения, в том числе — такие:

$T1.$ $\sim(s^1 \alpha R s^2) \equiv ((s^1, s^2) \leftarrow E) : (s^1 \beta R s^2) : (s^1 \gamma R s^2)$, где $\alpha R$, $\beta R$ и $\gamma R$ различаются как $R$, $\urcorner R$ и $?\,R$ в любых перестановках.

*T2.* $\sim((s^1 R s^2)\cdot(s^1 \urcorner R s^2))$, $\sim((s^1 R s^2)\cdot(s^1\, ?\, R s^2))$,
$\sim((s^1 \urcorner R s^2)\cdot(s^1\, ?\, R s^2))$.

## § 2. Логические типы отношений

Отношения с чисто логической точки зрения классифицируются следующим образом:

*D1.* ($R$ рефлексивно) $\leftrightarrow (s R s)$;
($R$ арефлексивно) $\leftrightarrow (s \urcorner R s)$;
($R$ нерефлексивно) $\leftrightarrow \sim(s R s)$.

*D2.* ($R$ симметрично) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \rightarrow s^2 R s^1)$;
($R$ асимметрично) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \rightarrow s^2 \urcorner R s^1)$;
($R$ несимметрично) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \rightarrow \sim(s^2 R s^1))$;
($R$ ослабленно несимметрично) $\leftrightarrow \sim(s^1 R s^2 \rightarrow$
$\rightarrow s^2 R s^1)$.

*D3.* ($R$ транзитивно) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \cdot s^2 R s^3 \rightarrow s^1 R s^3)$;
($R$ атранзитивно) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \cdot s^2 R s^3 \rightarrow s^1 \urcorner R s^3)$;
($R$ нетранзитивно) $\leftrightarrow (s^1 R s^2 \cdot s^2 R s^3 \rightarrow \sim(s^1 R s^3))$;
($R$ ослабленно нетранзитивно) $\leftrightarrow \sim(s^1 R s^2 \cdot s^2 R s^3 \rightarrow$
$\rightarrow s^1 R s^3)$.

## § 3. Элементарные и производные отношения

*D1.* Эр-высказывания вида

$$s^1 \alpha R s^2,$$

где $\alpha$ означает наличие или отсутствие $\urcorner$ или ?, суть элементарные эр-высказывания.

*D2.* Если $X$ есть эр-высказывание, в $Y$ входят эр-высказывания $Z^1, \ldots, Z^n$ $(n \geqslant 2)$, и при этом $X \equiv Y$, то $X$ есть производное от $Z^1, \ldots, Z^n$ эр-высказывание. Например, «$s^1, \ldots, s^n$ равны между собою» тождественно по смыслу с «$s^1$ равен $s^2$»,…,«$s^{n-1}$ равен $s^n$»; $(s^1 \cdot s^2) R s^3 \equiv s^1 R s^3 \cdot s^2 R s^3$; «$s^1$ бабушка $s^2$» тождественно по смыслу с «Существует $s^3$ такой, что если $s^1$ мать $s^3$, то $s^3$ отец или мать $s^2$».

Мы принимаем допущение, что высказывания

$$(s^1 \ldots, s^n)\, \alpha R$$

являются производными от элементарных. Это — эмпирически данный факт. Так что в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь элементарных эр-высказываний.

Элементарные эр-высказывания либо являются предположениями и соглашениями, либо фиксируют непосредственные наблюдения, либо получаются из высказываний с одноместными предикатами (из односубъектных высказываний). Например, «$a$ вдвое больше $b$» могло быть получено из высказываний о величине $a$ и о величине $b$, независимых друг от друга. В науке фактическое положение таково: если возникает потребность свести эр-высказывание к совокупности односубъектных высказываний, то эта потребность так или иначе удовлетворяется. Можно сформулировать такой принцип: «Для всякого эр-высказывания $X$ может быть найдено множество по крайней мере из двух односубъектных высказываний $Y^1,\ldots,Y^m$ таких, что $X \equiv Y^1\cdot\ldots\cdot Y^m$». Отыскание методов такого сведения есть одна из возможных задач науки, в которой формулируется $X$.

## § 4. Бинарные и энарные отношения

Со структурной точки зрения простейшими эр-высказываниями являются бинарные — высказывания о бинарных (между двумя предметами) отношениях. Они имеют вид $s^1\alpha Rs^2$. Но термины $s^1$ и $s^2$ могут иметь вид $(s_1^1,\ldots$ $\ldots, s_n^1)$ и $(s_1^2,\ldots,s_m^2)$. В таком случае получаются энарные эр-высказывания, где «эн» более трех,— высказывания об энарных (тернарных и более) отношениях. Однако, это имеет место лишь в том случае, когда энкой из двух и более терминов является $s^2$, а не $s^1$.

Дело в том, что высказывания $s^1\alpha Rs^2$ суть не просто высказывания об отношениях между предметами, но суть высказывания об отношениях одних предметов к другим: 1) отдельного предмета $s^1$ к отдельному предмету $s^2$; 2) отдельного предмета $s^1$ к энке предметов $(s_1^2,\ldots, s_m^2)$; 3) энки предметов $(s_1^1,\ldots,s_n^1)$ к отдельному предмету $s^2$; 4) энки предметов $(s_1^1,\ldots,s_n^1)$ к энке предметов $(s_1^2,\ldots$ $\ldots, s_m^2)$. Так что число находящихся в данном отношении предметов не зависит от того, какой вид имеет термин $s^1$. Оно зависит от вида $s^2$: если $s^2$ есть один термин, то отношение бинарное; если $s^2$ есть $(s_1^2, \ldots, s_m^2)$, то отношение $(m+1)$-арное. Предмет $s^1$ назовем первым членом отношения, а $s^2$ или $(s_1^2, \ldots, s_m^2)$ — вторым.

Известны случаи, когда энарные (с «эн» более двух) эр-высказывания сводятся к бинарным. Например, «$a$ находится между $b$ и $c$» в некоторых случаях может быть сокращением для «$a$ дальше $b$, $c$ дальше $a$». Но известны также случаи, когда такое сведение не производится. Например, для осмысленного оперирования высказыванием «Бологое находится между Москвой и Ленинградом» в некоторых случаях достаточно знать, что если поездом поедешь из Москвы в Ленинград (или обратно), то непременно проедешь через Бологое. С логической точки зрения тернарное высказывание здесь не сводится к совокупности бинарных.

Фактическое положение в науке таково: если возникает проблема свести некоторое энарное эр-высказывание к бинарным, то положительное решение этой проблемы так или иначе находят. Так что можно сформулировать принцип: «Для всякого эр-высказывания $X$ может быть построено непустое множество бинарных эр-высказываний $Y^1, \ldots, Y^m$ таких, что $X \equiv Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^m \cdot Z$, где $Z$ есть какое-то высказывание или пусто (отсутствует)». Отыскание методов такого сведения есть одна из возможных задач той науки, в которой формулируется $X$.

## § 5. Псевдоотношение

В логико-математической литературе отношением часто называют функцию от двух и более аргументов. Например, каждым двум натуральным числам может быть поставлено в соответствие натуральное число, называемое их суммой; и сумма двух чисел рассматривается как их отношение.

Общая схема образования терминов в таких случаях имеет следующий вид:

1) устанавливается

$$t^k \Leftarrow f(t^1, \ldots, t^n);$$

2) принимается

$$t(t^1, \ldots, t^n) = Df \cdot t^k.$$

Но термины такого типа не являются терминами отношений в нашем смысле. Последние суть термины вида

$$\downarrow (s^1 \alpha R\, s^2),$$

где все термины $s^1$, $R$ и $s^2$ независимы друг от друга по смыслу. Термин же $t(t^1,\dots,t^n)$ явно зависит по смыслу от $t^1, \dots, t^n$. Он буквально означает: «Функция $t$ от $t^1,\dots$ $\dots, t^n$».

## § 6. Сравнение

Два объекта $s^1$ и $s^2$ могут быть такими, что

$$(\exists P^*)(s^1 \leftarrow P^*) \cdot (s^2 \leftarrow P^*))$$

$$(\exists P^*)((s^1 \leftarrow P^*) \cdot (s^2 \urcorner \leftarrow P^*)).$$

В такого рода случаях говорят о сходстве и различии объектов. В зависимости от числа признаков и от их важности говорят о малом или большом сходстве или различии. Строятся эр-высказывания «$s^1$ сходен с $s^2$», «$s^1$ очень мало похож на $s^2$», «$s^1$ сильно отличается от $s^2$» и т. п.

Частный случай сравнения объектов — отождествление объектов (и его отрицание). Высказывания о тождестве объектов строятся так:

1) в каждом случае устанавливается (явно или неявно) множество признаков $P^1,\dots P^n$ такое, что «Если $(s^1 \leftarrow$ $\leftarrow P^1 \cdot \dots \cdot P^n) \cdot (s^2 \leftarrow P^1 \cdot \dots \cdot P^2)$, то $s^1$ тождествен $s^2$»;

2) в зависимости от того, выполняется это условие или нет, принимается «$s^1$ тождествен $s^2$» или его отрицание (неопределенности здесь исключены).

Отношение тождества рефлексивно, симметрично и транзитивно, а его отрицание арефлексивно, симметрично и нетранзитивно.

Для абстрактных объектов мыслимы случаи, когда допускается

$$(\forall P^*)((s^1 \leftarrow P^*) \cdot (s^2 \leftarrow P^*))$$

$$(\forall P^*)((s^1 \urcorner \leftarrow P^* \downarrow s^2) \cdot (s^2 \urcorner \leftarrow P^* \downarrow s^1))$$

и т. п. (случаи абсолютного тождества и различия). Предельный случай отождествления объектов — установление того, что $s^1$ и $s^2$ суть один и тот же объект (тот же самый). Здесь опять-таки указываются признаки, наличие которых считается достаточным для установления тождества такого рода (т. е. для установления того, что $s^1 \rightleftharpoons s^2$).

Отметим, наконец отношения превосходства одних объектов над другими («лучше», «хуже», «удобнее», «богаче», «значительно красивее», «не намного интереснее» и т. п.), устанавливаемые из сравнения множеств признаков. Высказывания такого рода строятся так:

1) устанавливается, что

$$s^1 \leftarrow P^1 \cdot \ldots \cdot P^n$$
$$s^2 \leftarrow P_1 \cdot \ldots \cdot P_m;$$

2) из сравнения $P^1 \cdot \ldots \cdot P^n$ и $P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$ получается высказывание о превосходстве одного из $s^1$ и $s^2$ над другими или его отрицание в зависимости от характера этих множеств признаков и от принятых критериев введения знаков превосходства.

Отношения превосходства арефлексивны, асимметричны и не всегда транзитивны. Так, если $s^1$ мало превосходит $s^2$ и $s^2$ мало превосходит $s^3$, то из этого не следует, что $s^1$ мало превосходит $s^3$. Кроме того, здесь всегда предполагается какой-то контекст, благодаря которому термины этих отношений приобретают смысл и удовлетворяют тем или иным целям.

От сравнения объектов надо отличать сравнение их признаков по величине, в результате которого получаются высказывания

$$(P \downarrow s^1)\, \alpha R\, (P \downarrow s^2),$$

где $R$ может быть отношением «равны», «больше», «на много меньше», «в $a$ раз больше» и т. п. По некоторым правилам языковых трансформаций эти высказывания принимают вид

$$s^1\, \alpha R\, P\, s^2,$$

где $P$ — название признака, по которому происходит сравнение. Например, высказывание «$s^1$ тяжелее $s^2$» получается из высказывания «Вес $s^1$ больше веса $s^2$».

Возможность числовой оценки признаков полезна в случае сравнения объектов по двум и более различным признакам. Пусть, например, числовая оценка признаков $s^1$ дает величины $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, а такого же рода оценка признаков $s^2$ — величины $\beta^1, \ldots, \beta^m$. Для сравнения $s^1$ и $s^2$ достаточно вычислить средний вес признаков $s^1$ (допустим, $\alpha^*$) и средний вес признаков $s^2$ (допустим, $\beta^*$). Теперь эр-высказывание об объектах $s^1$ и $s^2$ получается из сравнения $\alpha^*$ и $\beta^*$.

Сравнивающие высказывания все могут быть сведены к высказываниям с одноместными предикатами в следующем смысле: если имеется сравнивающее высказывание $Z$ с субъектами $s^1$ и $s^2$, то в принципе могут быть найдены такие высказывания $s^1 \leftarrow PX$ и $s^2 \leftarrow PY$, что «Если $X \cdot Y$, то $Z$». Но это не означает что подобное сведение всегда осуществляется практически. Часто сравнивающие высказывания фиксируют непосредственно наблюдаемые факты (благодаря наличию соответствующих навыков).

## § 7. Отношения порядка

Выражение «упорядоченность (порядок) предметов» мы принимаем за первично ясное, ограничиваясь примерами и пояснениями. В частности, расположение предметов в пространстве и появление или исчезновение их во времени суть случаи упорядоченности. Для фиксирования ее употребляются выражения «первый», «второй», ..., «выше», «ниже», «раньше», «одновременно», «правее» и т. п.

Отношение порядка суть частный случай отношений превосходства. Но это такой частный случай, который лежит в основе по крайней мере многих отношений другого рода и имеет первостепенное значение в науке.

Высказывание о том, что порядок $s^1$ и $s^2$ различен, причем порядок первого как-то превосходит порядок второго, будем изображать символом

$$s^1 \gg s^2.$$

Если $s^1 \gg s^2$ будет читаться как «$s^1$ раньше (позже) $s^2$», то $s^2 \gg s^1$ будет читаться как «$s^1$ позже (раньше) $s^2$»; аналогично для пар «выше — ниже», «правее — левее» и т. п. Короче говоря, $s^1 \gg s^2$ означает, что есть способ как-то определить различие порядка $s^1$ и $s^2$. Аналогично примем за первично ясные выражения

$$s^1 \urcorner \gg s^2 \text{ и } s^1 ? \gg s^2,$$

Примем определения:

$$D1.\quad s^1 \ll s^2 \equiv s^2 \gg s^1$$

$$s^1 \neg \ll s^2 \equiv (s^2 \gg s^1) : ((s^1 \neg \gg s^2) \cdot (s^2 \neg \gg s^1))$$

$$s^1 ? \ll s^2 \equiv s^2 ? \gg s^1$$

$$D2.\quad s^1 \gg \ll s^2 \equiv (s^1 \neg \gg s^2) \cdot (s^2 \neg \gg s^1)$$

$$s^1 \neg \gg \ll s^2 \equiv (s^1 \gg s^2) : (s^2 \gg s^1)$$

$$s^1 ? \gg \ll s^2 \equiv ((s^1 ? \gg s^2) \cdot (s^2 \neg \gg s^1)) : ((s^2 ? \gg s^1) \cdot$$

$$\cdot (s^1 \neg \gg s^2)) : ((s^1 ? \gg s^2) \cdot (s^2 ? \gg s^1))$$

В *D1* определен порядок, обратный $\gg$, а в *D2* — тождество порядка. Очевидно,

$$T1.\quad s^1 \gg \ll s^2 \dashv\vdash s^2 \gg \ll s^1.$$

*D3*. Высказывания $s^1\alpha \gg s^2$, $s^1\alpha \ll s^2$, $s^1\alpha \gg \ll s^2$ суть порядковые высказывания.

Для некоторых предметов порядок считается данным (он ясен, не вызывает сомнений), для других устанавливается через первые. Причем, порядок предметов исследователь определяет либо относительно самого себя, либо относительно какого-то другого предмета, выбранного для этой цели. Так, утверждая «*a* дальше *b*», утверждающий может иметь в виду то, что если какой-то предмет будет от него двигаться в направлении к *a*, то он пройдет мимо *b*; а утверждая «Москва южнее Ленинграда», утверждающий может иметь в виду то, что параллель Москвы ближе к экватору, чем параллель Ленинграда. Если исследователь определяет порядок двух предметов относительно третьего, отличного от самого исследователя, то все его знаки имеют смысл такой, как если бы исследователь находился на месте этого предмета.

Фиксирование порядка предметов относительно исследователя — дело ненадежное, субъективное. В случае же фиксирования порядка предметов относительно предмета, отличного от самого исследователя, дается возможность выбрать для этой цели удобные предметы (назовем их точками определения или отсчета порядка): устойчивые, более или менее широко принятые и стандартные, дающие возможность проверки соответствующих утверждений и исключающие двусмысленность и т. п.

Термины предметов, служащих точками определения порядка, будем изображать символами

$$\delta,\ \delta^1, \delta^2, \ldots .$$

Порядковые высказывания теперь будем изображать символами

$$s^1 \alpha R s^2 \mid \delta.$$

Условимся, что точка определения порядка всегда существует. Символом $\delta^*$ будем записывать термин «точка определения порядка».

Для порядковых высказываний (или, другими словами, для отношений порядка) имеют силу утверждения:

*A 1.* $(\forall \delta^*)\,(s \urcorner\!\gg s \mid \delta^*)$

*A 2.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta) \vdash (s^2 \urcorner\!\gg s^1 \mid \delta)$

*A 3.* $(s^1 ? \gg s^2 \mid \delta) \vdash (s^2 ? \gg s^1 \mid \delta)$

*A 4.* $(s^1 \urcorner\!\gg s^2 \mid \delta) \dashv\vdash (s^2 \gg s^1 \mid \delta) : (s^1 \gg\ll s^2 \mid \delta)$

*A 5.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta) \cdot (s^2 \gg s^3 \mid \delta) \vdash (s^1 \gg s^3 \mid \delta)$

*A 6.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta) \cdot (s^2 \gg s^3 \mid \delta^1) \cdot (s^1 \gg \delta \mid \delta^2) \cdot (s^2 \gg \delta^1 \mid$
$\mid \delta^2) \vdash (s^1 \gg s^2 \mid \delta^1)$

Следствия из *A1 — A6*:

*T2.* Отношение $\gg$ арефлексивно, асимметрично, транзитивно.

*T 3.* $\sim (s \gg s \mid \delta)$

*T 4.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta) \vdash \sim (s^2 \gg s^1 \mid \delta)$

*T 5.* $\sim ((s^1 \gg s^2 \mid \delta) \cdot (s^2 \gg s^1 \mid \delta)$

*T 6.* $\sim ((s^1 \gg s^2 \mid \delta) \cdot (s^1 \urcorner\!\gg s^2 \mid \delta).$

*T7.* Если $\delta^1$ и $\delta^2$ различны, то

$$\sim ((s^1\alpha \gg s^2 \mid \delta^1) \vdash (s^1\alpha \gg s^2 \mid \delta^2))$$
$$\sim ((s^1\alpha \gg s^2 \mid \delta^1) \vdash (s^1\alpha \ll s^2 \mid \delta^2))$$

и т. д. для всех прочих комбинаций отношений порядка слева и справа от знака следования.

## § 8. Отношение «между»

Отношение «между» обозначим символом М и определим следующими утверждениями:

*A 1.* $(s^3 \alpha\, \mathrm{M}\, (s^1, s^2)) \equiv (\alpha\, \exists\, \delta^*)\, ((s^1 \gg s^3 \mid \delta^*) \cdot (s^3 \gg s^2 \mid$
$\mid \delta^*))$

$$(s^4 \alpha\, \mathrm{M}\, (s^1, s^2, s^3)) \equiv (\alpha\, \exists\, s^5)\, ((s^5 \mathrm{M}\, (s^1 s^2)) \cdot ((s^4 \mathrm{M}\, (s^3, s^5)))$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(s^k \alpha \mathrm{M} (s^1, \ldots, s^n)) \equiv (\alpha \ \exists s^{n+1}) ((s^{n+1} \mathrm{M} (s^1, \ldots, s^{n-1})) \cdot (s^n \mathrm{M} (s^k, s^{n+1})))$

Следствия из *A1*:

*T 1.* $(s^3 \mathrm{M} (s^1, s^2)) \cdot (s^4 \mathrm{M} (s^3, s^1)) \vdash (s^4 \mathrm{M} (s^1, s^2))$

*T 2.* $(s \mathrm{M} (s^1, \ldots, s^n)) \cdot (s^1 \mathrm{M} (s_1, \ldots, s_m)) \cdot \ldots \cdot (s^n \mathrm{M} (s_1, \ldots, s_m)) \vdash (s \mathrm{M} (s_1, \ldots, s_m))$

*T 3.* $(s_1 \mathrm{M} (s^1, \ldots, s^{n+1})) \cdot (s_2 \mathrm{M} (s_1, s^1 \ldots s^n)) \vdash (s_2 \mathrm{M} (s^1, \ldots, s^{n+1}))$

*T 4.* $s^3 \alpha \mathrm{M} (s^1, s^2) \vdash s^3 \alpha \mathrm{M} (s^2, s^1)$.

## § 9. Порядок чисел

Отношение порядка касается любых объектов, в том числе — чисел. Для последних эти отношения принимаются определениями для одних чисел, а для других чисел выясняются по правилам вывода из этих определений. Например, если принято, что $\alpha + 1 \gg \alpha$, где $\alpha$ есть ноль или натуральное число, то $1 \gg 0$, $1 + 1 \gg 1$, $\alpha^1 + \alpha^2 + 1 \gg \alpha^1$ и т.п.

Отметим одну особенность чисел. Из того, что $s^1 \gg \ll s^2$ не следует в общем случае то, что $s^1 \rightleftharpoons s^2$. Для чисел же имеет силу утверждение

$$(s^1 \gg \ll s^2) \leftrightarrow (s^1 \rightleftharpoons s^2).$$

Вместо $\gg$ и $\ll$ для чисел приняты $>$ и $<$.

## § 10. Интервал

Любым двум предметам $s^1$ и $s^2$ в данной области исследования, для которых возможно установить отношение порядка, может быть поставлен в соответствие некоторый знак, называемый знаком интервала между $s^1$ и $s^2$. Будем его изображать символом

$$< s^1, s^2 \mid \delta >,$$

где $\delta$ есть точка определения порядка. Другими словами:

*D1.* Если $(s^1 \gg s^2 \mid \delta)$ или $(s^1 \gg \ll s^2 \mid \delta)$, то $< s^1, s^2 \mid \delta >$ есть знак интервала между $s^1$ и $s^2$. Последние суть границы интервала.

Можно говорить о порядке интервалов, имея в виду при этом порядковые отношения их границ. Здесь возможны различные комбинации, например — такая.

Пусть $\alpha^1$ есть интервал $\langle s^1, s^2 | \delta\rangle$, а $\alpha^2$ — интервал $\langle s^3, s^4 | \delta\rangle$. Примем определение:

*D2*. Если $(s^1 \gg s^2 | \delta)$, то $(\alpha^1 \gg \alpha^2 | \delta) \equiv (s^2 \gg s^3 | \delta)$: $: (s^2 \gg \ll s^3 | \delta)$; если $s^1 \gg \ll s^2 | \delta$, то $(\alpha^1 \gg \alpha^2 | \delta) \equiv (s^2 \gg s^3 | \delta)$.

## § 11. Упорядоченный ряд

*D1*. Будем говорить, что элементы $Ks$ образуют упорядоченный ряд

$$R(s,\delta),$$

если и только если

$$(\forall (s^{*1}\downarrow \in Ks, s^{*2}\downarrow \in Ks)) \; ((s^{*1} \gg s^{*2} \mid \delta) : (s^{*2} \gg s^{*1} \mid \delta)).$$

Элементы такого $Ks$ суть элементы $R(s,\delta)$.

*T1*. Если $s^1$ и $s^2$ суть элементы $R(s,\delta)$, то

$$\sim (s^1 \gg s^2 \mid \delta \mid ) \equiv (s^2 \gg s^1 \mid \delta).$$

*D2*. Ряд $R(s^1,\delta)$ есть актуальный отрезок ряда $R(s^2, \delta)$, если и только если

$$(\forall s^{*1}\downarrow \in Ks^1)\,(\exists s^{*2}\downarrow \in Ks^2)\,(\exists s^{*3}\downarrow \in Ks^2)\,(((s^{*2} \ll s^{*1} \mid \delta) : : (s^{*2} \gg \ll s^{*1} \mid \delta)) \vee ((s^{*3} \gg s^{*1} \mid \delta) : (s^{*3} \gg \ll s^{*1} \mid \delta)));$$

ряд $R(s^1, \delta)$ есть собственный актуальный отрезок ряда $R(s^2, \delta)$, если и только если

$$(\forall s^{*1}\downarrow \in Ks^1)\,(\exists\, s^{*2}\downarrow \neg \in Ks^1 \cdot \in Ks^2)\,(s^{*2} \gg s^{*1} \mid \delta) \vee \vee (\forall s^{*1}\downarrow \in Ks^1)\,(\exists\, s^{*3}\downarrow \neg \in Ks^1 \cdot \in Ks^2)\,(s^{*3} \ll s^{*1} \mid \delta);$$

определения потенциального отрезка и собственного потенциального отрезка получаются путем замены обоих $\exists$ на $M$.

*D3*. Ряд $R(s,\delta)$ актуально прерывен, если и только если

$$(\exists\,(s^{*1}\downarrow \in Ks, s^{*2}\downarrow \in Ks))\,(\neg \exists\, s^{*3}\downarrow \in Ks)\,((s^{*1} \gg s^{*3} \mid \delta) \cdot \cdot (s^{*3} \gg s^{*2} \mid \delta));$$

определение потенциальной прерывности получается путем замены $\neg\exists$ на $\neg\, M$ (первый квантор $\exists$ остается).

*D4*. Интервал $\langle s^{*1}, s^{*2} | \delta\rangle$ в *D3* есть перерыв $R(s, \delta)$.

*D5*. Ряд $R(s,\delta)$ актуально непрерывен, если и только если

$$(\forall (s^{*1}\downarrow\in Ks, s^{*2}\downarrow\in Ks))(\exists s^{*3}\downarrow\in Ks)((s^{*1}\gg s^{*3} \mid \delta)\cdot(s^{*3}\gg\gg s^{*2} \mid \delta));$$

определение потенциальной непрерывности получается путем замены $\exists$ на $M$.

Определение *D5* можно получить как следствие из *D3* (или *D3* из *D5*), если рассматривать одно как внешнее отрицание другого: имеет силу *T1*, а неопределенности кванторов исключены. Ряды могут быть смешанными, т. е. иметь прерывные и непрерывные отрезки в той или иной комбинации.

*D6*. $s^i$ есть начальный элемент $R(s,\delta)$, если и только если

$$s^i \leftarrow P((\forall s^*\downarrow\in Ks)((s^*\downarrow\in Ks\gg s^i \mid \delta):(s^*\downarrow\in Ks\gg\ll s^i \mid \delta)),$$

и конечный элемент $R(s,\delta)$, если и только если

$$s^i \leftarrow P((\forall s^*\downarrow\in Ks)((s^*\downarrow\in Ks\ll s^i \mid \delta):(s^*\downarrow\in Ks\gg\ll s^i \mid \delta)).$$

*D7*. Ряд $R(s,\delta)$ имеет актуальный начальный элемент, если

$$(\exists s^{*1}\downarrow\in Ks)(\forall s^{*2}\downarrow\in Ks)(s^{*1}\gg s^{*2} \mid \delta),$$

и не имеет его, если

$$(\neg\exists s^{*1}\downarrow\in Ks)(\forall s^{*2}\downarrow\in Ks)(s^{*1}\gg s^{*2} \mid \delta);$$

определения для потенциального начального элемента получаются путем замены $\exists$ на $M$ и $\neg\exists$ на $\neg M$.

*D8*. Определения для конечного элемента $R(s,\delta)$ получаются из *D7* путем замены $s^{*1}\gg s^{*2}$ на $s^{*1}\ll s^{*2}$.

По числу элементов ряды разделяются на ряды с конечным и с бесконечным числом элементов (актуально и потенциально). Здесь точно также есть зависимости. Например, если ряд непрерывен или имеет непрерывный отрезок или не имеет начального или конечного элемента, или имеет отрезок без начального или конечного элемента, то он бесконечен по числу элементов.

*D9*. Для всякого ряда может быть выбран другой ряд такой, что результат некоторого их сопоставления есть знак, называемый знаком направления первого ряда.

## § 12. Протяженность интервала и ряды

Всякий интервал имеет протяженность (или величину), которая характеризуется следующими утверждениями:

*А 1.* $(s^1 \gg\ll s^2 \mid \delta) \rightarrow < s^1, s^2 \mid \delta > = 0.$

*А 2.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta) \rightarrow < s^1, s^2 \mid \delta > > 0.$

*А 3.* $< s^1, s^2 \mid \delta > = < s^2, s^1 \mid \delta >.$

*А 4.* $(s^1 \gg s^2 \mid \delta)\cdot(s^2 \gg s^3 \mid \delta) \rightarrow (< s^1, s^3 \mid \delta > = < s^1, s^2 \mid \delta > + < s^2, s^3 \mid \delta >).$

Архаическая форма измерения интервала характеризуется утверждениями:

1) Если $(\neg M s^3)\ ((s^1 \gg s^3 \mid \delta)\cdot(s^3 \gg s^2 \mid \delta))$, то величина $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle$ такова, что $(\neg M s^3)\ ((s^1 \gg s^3 \mid \delta)\cdot(s^3 \gg s^2 \mid \delta))$.

2) Если $(M s_1) \ldots (M s_n)\ ((s^1 \gg s_1 \mid \delta)\cdot \ldots \cdot(s_n \gg s^2 \mid \delta))$, где $n \geqslant 1$, то величина $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle$ такова, что $(M s_1)\ldots(M s_n)\ ((s^1 \gg s_1 \mid \delta)\cdot \ldots \cdot(s_n \gg s^2 \mid \delta))$.

Интервал, указанный в 1, есть предшественник единицы измерения, а фиксирование величины интервала в том виде, как это указано в 2,— измерения интервалов в принятой системе единиц. Пусть $\alpha$ есть название интервала, принятого за единицу. Тогда:

*А5.* Если $(M s_1) \ldots (M s_{n-1})\ ((s^1 \gg s_1 \mid \delta)\cdot \ldots \cdot(s_{n-1} \gg s^2 \mid \delta))$ и $\langle s^1, s_1 \mid \delta \rangle = \ldots = \langle s_{n-1}, s^2 \mid \delta\rangle = \alpha$, то $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle = n\alpha$ ($n$ единиц $\alpha$).

*А6.* Если $\alpha$ и $\beta$ суть единицы измерения интервалов, $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle = n\alpha$ и $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle = m\beta$, то $n\alpha = m\beta$ (величина интервала не зависит от выбора единиц измерения).

*D1.* Если $(M s^*)\ ((s^1 \gg s^* \mid \delta)\cdot(s^* \gg s^2 \mid \delta))$, то $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle$ делим; если $(\neg M s^*)\ ((s^1 \gg s^* \mid \delta)\cdot(s^* \gg s^2 \mid \delta))$, то $< s^1, s^2 \mid \delta >$ неделим.

Теоретически всякий интервал, больший нуля, делим бесконечно. Практически же процесс деления где-то останавливается,— находится минимальный для данных условий интервал или само понятие интервала теряет практический смысл.

*Т1.* Величина интервала зависит от выбора точки отсчета в том смысле, что не всегда верно

$$< s^1, s^2 \mid \delta^1 > = < s^1, s^2 \mid \delta^2 >;$$

другими словами,

$$\sim ((< s^1, s^2 \mid \delta^1 > = \alpha) \rightarrow (< s^1, s^2 \mid \delta^2 > = \alpha)).$$

Но величина интервала не зависит от смены точки отсчета, т. е.

$$(\forall\delta^*) \sim ((<s^1, s^2 \mid \delta^*> = \alpha) \cdot (<s^1, s^2 \mid \delta^*> \neq \alpha)).$$

Если исследователь переменил точку отсчета порядка $s^1$ и $s^2$, то само это действие исследователя не ведет к тому, что интервал между $s^1$ и $s^2$ относительно прежней точки отсчета станет другим.

Относительно некоторых интервалов принимается (известно, предполагается), что они имеют конечную протяженность. Для прочих случаев характер интервала и ряда определяется системой такого рода утверждений:

1) «Если число элементов ряда конечно и все интервалы между его элементами имеют конечную протяженность, то ряд имеет конечную протяженность».

2) «Если число элементов ряда бесконечно и имеется минимальный интервал, то ряд имеет бесконечно большую протяженность».

3) «Если по крайней мере один отрезок ряда имеет бесконечно большую протяженность, то ряд имеет бесконечно большую протяженность; если ряд имеет конечную протяженность, то все его отрезки имеют конечную протяженность».

*D2*. Интервал $\langle s^1, s^2 \mid \delta\rangle$ имеет бесконечно малую протяженность, если и только если

$$(\forall (<s^{*1}, s^{*2} \mid \delta> \downarrow > 0)) ((<s^1, s^2 \mid \delta> < <s^{*1}, s^{*2} \mid \delta>) \cdot (<s^1, s^2 \mid \delta> > 0))$$

(он больше нуля и меньше любого интервала, который больше нуля).

## § 13. Структура

*D1*. Примем следующее определение структуры:

1) если $(s^1 \gg s^2 \mid \delta)$, то объекты $s^1$ и $s^2$ образуют бинарную структуру относительно $\delta$;

2) если для любого объекта $s^i$ из множества объектов $s^1, \ldots, s^n$ $(n \geqslant 2)$ найдется другой объект $s^k$ из этого множества объектов такой, что $(s^i \gg s^k \mid \delta^j)$, то объекты $s^1, \ldots, s^n$ образуют энарную структуру относительно некоторых $\delta^1, \ldots, \delta^m (m \geqslant 1)$.

*D2*. Объекты $s^1,\ldots, s^n$, указанные в *D1*, суть элементы структуры.

Структуры будем изображать символами вида

$$RS(s^1,\ldots,s^n \mid \delta^1,\ldots,\delta^m).$$

Очевидно, один объект не есть структура, так как для любых точек определения порядка $\sim(s \gg s \mid \delta)$. Если $(s^1 \gg \ll s^2 \mid \delta)$, то $s^1$ и $s^2$ не образуют структуру относительно $\delta$, так как $(s^1 \gg \ll s^2 \mid \delta) \vdash \sim (s^1 \gg s^2 \mid \delta) \cdot \sim (s^2 \gg s^1 \mid \delta)$.

Мы не будем развивать здесь системы возможных понятий, характеризующих виды, отношения и свойства структур. Ограничимся лишь несколькими из них, которые нам здесь пригодятся.

*D3*. Две структуры $RS(s^1,\ldots,s^n \mid \delta^1,\ldots\delta^m)$ и $RS(s_1,\ldots, s_n \mid \delta_1 ,\ldots, \delta_m)$ подобны, если и только если для любой пары элементов $s^i$ и $s^{i+1}$ одной из них найдется пара элементов $s_i$ и $s_{i+1}$ другой из них такая, что

$$(< s^i, s^{i+1} \mid \delta^i > \Leftarrow f^1 < s_i, s_{i+1} \mid \delta_i >) (< s_i, s_{i+1} \mid \delta_i > \Leftarrow \\ \Leftarrow f^2 < s^i, s^{i+1} \mid \delta^i >),$$

где $f^1$ и $f^2$ суть функции, обратные друг другу.

Понятия протяженности ряда и отрезка ряда можно обобщить на структуры. Понятие, аналогичное понятию протяженности ряда и имеющее силу для структур, мы вводить не будем: в силу разделения труда между логикой, физикой и математикой здесь кончается компетенция логики. Что касается второго понятия, то мы его введем: оно простое.

*D4*. Структура $RS(s_1,\ldots, s_m \mid \delta_1,\ldots, \delta_{m-1})$ есть подструктура структуры $RC(s^1,\ldots, s^n \mid \delta^1,\ldots,\delta^{n-1})$, если и только если выполняется следующее:

1) множество объектов $s_1,\ldots, s_m$ есть собственное подмножество объектов $s^1,\ldots,s^n$; множество объектов $\delta_1,\ldots, \delta_{m-1}$ есть подмножество объектов $\delta^1,\ldots, \delta^{n-1}$;

2) всякий объект, который находится между $s_1 ,\ldots, s_m$, находится также и между $s^1,\ldots, s^n$.

Второй пункт в *D4* говорит о том, что не всякие объекты из множества объектов $s^1,\ldots,s^n$ образуют подструктуру структуры $RC(s^1,\ldots,s^n \mid \delta^1,\ldots,\delta^{n-1})$.

Имеется множество способов зафиксировать то, что называют положением объекта. Это — указание ряда, элементом которого он является, нескольких рядов и их направлений, структур и т. д. И при всех обстоятельствах положение объекта есть всегда положение относительно каких-то других объектов,— если задано положение объекта, то задана некоторая структура, элементом которой он является. Изменение положения объекта есть точно так же всегда нечто относительное.

Элементами рядов могут быть структуры. Структурные ряды могут быть прерывными и непрерывными, конечными и бесконечными и т. п. Энарные структуры сводятся к совокупностям структур с меньшим числом элементов, если для каких-то их элементов выполняется то, что указано в посылке $A6$XII7. Не всякая ситуация рассматривается как структура. Но всякий набор из двух и более ситуаций есть структура. Описание структуры складывается из множества высказываний, фиксирующих объекты, точки отсчета, ряды, направление рядов, интервалы и т. п.

## § 14. Часть и целое

В логико-математической литературе можно встретить заявление о том, что утверждение «Часть всегда меньше целого» неверно в области бесконечных классов: здесь возможны случаи, когда мощность собственного подкласса равна мощности самого класса. Это заявление лишено смысла, поскольку все термины «часть», «меньше» и «целое» являются в приведенном утверждении неопределенными, многосмысленными. В самом деле, что означает термин «меньше» в применении к классам? Он может означать, что мощность одного класса меньше мощности другого. Но он может означать то, что найдется по крайней мере один индивид, который не включается в один класс и включается в другой. Термины же «часть» и «целое» могут обозначать отношения классов, отношения отрезков и рядов, структур и подструктур и т. п. Все рассматриваемые термины нуждаются в уточнении, без которого утверждение «Часть всегда меньше целого» многосмысленно, а значит — лишено смысла.

Но как только мы попытаемся уточнить понятия «часть» и «целое», мы должны будем ввести серию понятий, делающих их излишними. В обиходе же (на интуитивном уровне) эти термины чаще употребляются для обозначения отношений отрезка и ряда, структуры и подструктуры. При этом термины «меньше» касается сравнения их протяженности и «объема».

Понятия части и целого являются не единственными общими понятиями, уточнение которых заставляет вводить комплексы других понятий и превращает исходные (уточняемые) понятия в чисто литературные или обиходные выражения с весьма аморфным смыслом.

## § 15. Пространство и время

Определить термины «пространство» и «время» по принципу «Пространство (время) есть то-то» невозможно. Здесь нужен другой способ определения, а именно — установить значения выражений, содержащих термины «правее», «левее», «дальше», «ближе», «расстояние между», «одновременно», «раньше», «позже», «прошло столько-то времени» и т. п.,— т. е. термины, обозначающие пространственный и временной порядок, интервалы, направления рядов и т. д. А это можно сделать путем подходящих интерпретаций соответствующих выражений логики отношений, элементы которой были рассмотрены выше.

Отображение пространства есть прежде всего (и в конце концов) отображение упорядоченности эмпирических объектов. При этом необходимо допустить у отражающего существа наличие способности к действиям, которые позволяют для некоторых объектов установить их пространственный порядок (поворот головы, глаз, тела; передвижение к предмету и от предмета и т. п.). Эти действия отражающее существо осуществляет при отражении объектов. Последние выбираются в достаточно малом временном интервале (сосуществуют). Так что установление пространственного порядка некоторых объектов для отражающего существа проблемы не представляет (он определен его действиями). Пространственный порядок прочих объектов определяется через указанные выше. Измерение пространственных интервалов связано с возможностью обнаружить или поместить какие-то объекты между данными.

Время отражается не через отражение упорядоченности объектов, а через отражение упорядоченности их изменений. «Метки» пространства — эмпирические объекты, а «метки» времени — изменения. Это обстоятельство имеет решающее значение при решении всех проблем, относящихся к понятию времени.

Всякое изменение осуществляется, конечно, во времени. Но есть такие изменения, при фиксировании которых отражающий (человек, аппарат) не принимает во внимание то, что на них затрачено время. Во внимание принимается только то, что эти изменения осуществляются. Эти изменения суть моменты времени («метки» времени). Интервал времени, в течение которого происходят эти изменения, больше нуля на самом деле. Но он принимается как равный нулю, ибо с чего-то надо начать отражение времени.

Моменты времени — это такие изменения, которые важны для отражающего лишь со следующей точки зрения: 1) важен их порядок; 2) важно их число (для измерения времени); при этом момент есть граница временного интервала.

Если какие-то изменения выбраны в качестве таких «меток» времени, то временной интервал фиксируется так: 1) наблюдается одно изменение, затем наблюдается другое изменение; 2) интервал между ними относительно некоторого изменения, принятого за точку отсчета, есть интервал времени. При этом для одних изменений их порядок есть результат наблюдения (последовательность наблюдения совпадает с объективной их последовательностью),— т. е. временные отношения порядка даны. Для других же изменений они определяются через них.

Выше мы говорили, что при фиксировании изменений исследователь наблюдает состояния объектов во временной последовательности (одно за другим). Вместе с тем, мы утверждаем здесь, что фиксирование изменений есть средство фиксирования времени. Однако, никакого круга здесь нет: в первом случае не предполагается, что исследователь имеет понятие о времени; во втором же случае речь идет именно об отражении времени в терминологии исследователя.

Время объекта $s$ есть интервал времени

$$<|s \urcorner \leftarrow E| \Rightarrow |s \leftarrow E|,\ |s \leftarrow E| \Rightarrow |s \urcorner \leftarrow E \parallel \delta>.$$

Временные отношения объектов суть отношения их времен (т. е. только что указанных интервалов).

Единица измерения времени есть временной интервал. Величина временного интервала в конечном счете определяется возможностью или невозможностью каких-то изменений между его пограничными моментами.

Пространство и время не являются эмпирическими объектами. Нельзя отдельно наблюдать эмпирические объекты и их изменения, с одной стороны, и пространство и время, с другой. Бессмысленно говорить об изменении, возникновении и исчезновении пространства и времени. Бессмысленно говорить о скорости времени. Выражения «пространство изменяется», «свойства пространства», «структура пространства», «изменение времени», «скорость времени», «поток времени», «разное течение времени», «обратный ход времени» и т. д., которые часто встречаются в околонаучной и даже научной литературе, либо имеют смысл лишь как литературные пародии на термины, обозначающие пространственный и временный порядок объектов, пространственные и временные интервалы, ряды, структуры и т. д., либо вообще лишены смысла и противоречивы. Все трюки с понятиями пространства и времени, которыми в течение многих лет потрясают воображение читателей, основываются на неясности и неопределенности привычных выражений, а также на их неявном переосмыслении. Например, достаточно в качестве пространства рассматривать множество объектов, заключенное внутри некоторой.... пространственной (в изложенном выше смысле) структуры в некоторое... время, как можно будет без особого труда вывести серию утверждений, вступающих в конфликт со «здравым смыслом» и привычными представлениями.

Пространство и время существуют не в том же смысле, что и эмпирические предметы. Они существуют для исследователя лишь в том случае, если он в состоянии выбрать по крайней мере два различных эмпирических объекта, образующие для него пространственную структуру, и (для времени) по крайней мере два различных изменения, образующие для него временную структуру.

## § 16. Логика и физика

Логика ничего не утверждает о мире, который отображается в терминах и высказываниях. Но утверждения о мире (физические, скажем, утверждения) суть определенные структуры из знаков, содержащие логические знаки. И какими бы не были конкретные единицы смысла тех или иных утверждений, можно из них сконструировать утверждения, истинные исключительно в силу свойств такого рода структур знаков. Это общеизвестно.

Но имеет место еще более тонкое и далеко идущее отношение физических и логических утверждений. Оно связано с тем, что многие физические термины («начало», «конец», «вечно», «пространство», «время», «причина» и т. д.) могут быть уточнены посредством терминов логики со всеми вытекающими отсюда последствиями: соответствующие утверждения логики приобретают силу физических. Так, при уточнении серии понятий, связанных с пространством и временем, можно воспользоваться терминологией логики отношений; при этом придется рассматривать пространственные и временные отношения как частный случай отношений вообще, распространяя на них соответствующие утверждения логики.

Физик, например, может утверждать: «Мир не имеет начала во времени», «Мир имеет начало во времени», «Время непрерывно», «Время прерывно», «Мир не имеет начала в пространстве», «Мир расширяется в пространстве» и т. п. Все эти утверждения внелогические. Но они суть знаковые структуры, свойства которых описываются в логике. И если эксплицировать все входящие в них знаки, то получится серия утверждений

$$(\neg \exists s^1)(\forall s^2)((s^2 \gg s^1 | \delta) : (s^2 \gg \ll s^1 | \delta))$$

$$(\exists s^1)(\forall s^2)((s^2 \gg s^1 | \delta) : (s^2 \gg \ll s^1 | \delta))$$

$$(\neg M s^1)(\forall s^2)((s^2 \gg s^1 | \delta) : (s^2 \gg \ll s^1 | \delta))$$

и т. п., логическая структура которых выражена явно. Логика не компетентна советовать физике принимать или отвергать те или иные утверждения. Но она вполне компетентна указать границы, за которые не может выходить наука при выдвижении своих гипотез, формулировать своего рода логические «табу». И эти границы априорны, т. е. вытекают из ранее принятых определений, а не извлекаются из опыта, подобно тому, как мы вправе априори говорить о невозможности события $|x \cdot \sim x|$.

Возьмем такой пример. Пусть состояние $|x|$ есть «Тело $s$ находится в области пространства $u^1$», а $|\neg x|$ — «Тело $s$ не находится в $u^1$». Пусть состояние $|y|$ есть «Тело $s$ не находится в области пространства $u^2$», а $|\neg y|$ — «Тело $s$ находится в $u^2$». Пусть $s$ перемещается из $u^1$ в $u^2$, а последние не совпадают, т. е. $(\exists \delta^*)(u^1 \gg u^2 | \delta^*)$. Чтобы зафиксировать перемещение $s$, исследователь должен зафиксировать $|x| \Rightarrow$ $\Rightarrow |\neg x|$ и затем $|y| \Rightarrow |\neg y|$. Получаем, таким образом, интервал времени $\langle |x| \Rightarrow |\neg x|, |y| \Rightarrow |\neg y| \,|\, \delta \rangle$, который больше нуля (с какой бы скоростью не двигался $s$), поскольку $((|y| \Rightarrow |\neg y|) \gg (|x| \Rightarrow |\neg x|) \,|\, \delta)$. Таким образом, с точки зрения исследователя, наблюдающего перемещение тела из одной области пространства в другую, утверждение о том, что это перемещение не может быть мгновенным (без затрат времени), является априорным, вытекающим из смысла самих употребляемых им понятий. Если же исследователь допускает возможность мгновенных перемещений, он допускает некоторые абстрактные объекты (что равносильно намерению не принимать во внимание времени, требующегося на перемещение).

Другой пример. Известно, что пространственный интервал между эмпирическими объектами $s^1$ и $s^2$ может измениться: возможны случаи, когда $\langle s^1, s^2 | \delta \rangle = \alpha$ во время $r^1$ и $\langle s^1, s^2 | \delta \rangle = \beta$ во время $r^2$, но $\alpha \neq \beta$. Причем, здесь имеется в виду изменение интервала между теми же самыми объектами (последние сохраняются). Изменения объектов происходят, но они не существуют в том же смысле, что и эмпирические предметы. Они не сохраняются. Если $a$ и $b$ суть какие-то изменения, то для суждения об изменении $\langle a, b | \delta \rangle$ необходимо наблюдать $\langle a, b | \delta \rangle = \alpha$ в одно время и $\langle a, b | \delta \rangle = \beta$ в другое, где $\alpha \neq \beta$, что исключено по самому смыслу понятий. Единственное, что здесь возможно, это различие интервалов между различными представителями $Ka$ и $Kb$: $\langle a^1, b^1 | \delta \rangle \neq \langle a^2, b^2 | \delta \rangle$, где $a^1 \in Ka$, $a^2 \in Ka$, $b^1 \in Kb$, $b^2 \in Kb$. Все сказанное распространяется на временные отношения объектов вообще.

В силу разделения труда, сложившегося в науке, проблемы исследования пространственно-временных свойств мира стали проблемами физики. Физика развивает соответствующую теорию измерений, учитывающую скорость сигналов о наступлении событий, перемещение событий и наблюдателей, взаимные перемещения событий и т. д. Здесь возникают свои трудности, складываются парадоксальные ситуации. Но эти трудности и «парадоксы» суть показатель сложности проблемы измерения пространственно-временных отношений. Они имеют внелогическую природу. И когда стремятся им придать характер несоответствия некоей косной логике, то только запутывают довольно простые с логической точки зрения вещи.

## § 17. Исторические науки

Имеется группа опытных наук, которые относят к числу наук «исторических». Особенности исследования в таких науках характеризуются терминами «эволюция», «развитие», «происхождение» и т. п. Все эти термины могут быть уточнены в рамках логической теории научных знаний.

## § 18. Квантование пространства и времени

Пусть символы

$$a^1,\ a^2,\ a^3, \ldots$$

суть термины пространственных структур, а

$$b^1,\ b^2,\ b^3, \ldots \text{ —}$$

временных. Символы $a$ и $b$ суть соответственно «область (структура) пространства» и «временной интервал». Символами

$$s \leftarrow |a^i| \text{ и } s \leftarrow |b^i|$$

будем изображать высказывания «$s$ находится в $a^i$» и «$s$ существует в $b^i$».

В науке употребляются высказывания

$$(\alpha \reflectbox{K}\, a)\,((s\downarrow|a|)\,\beta \leftarrow P),\ \ (\alpha \reflectbox{K}\, b)\,((s\downarrow|b|)\,\beta \leftarrow P)$$

$$(\alpha \reflectbox{K}\, a)\,((s\beta \leftarrow |a|),\ \ (\alpha \reflectbox{K}\, b)\,(s\beta \leftarrow |b|),$$

где квантор связывает только термины времени и пространства. Эти кванторы обычно суть слова «везде», «иногда», «никогда», «всегда» и т. п. При этом термин $s$ может быть индивидуальным.

## § 19. Отношение и функция

Для некоторых отношений представляются приемлемыми выводы

$$(\forall s^1)\,(\forall s^2)\,(s^1 R\, s^2)\cdot(s^1 \leftarrow PX) \rightarrow (s^2 \leftarrow PY)$$

$$(\forall s^1)\,(\forall s^2)\,(s^1 R\, s^2)\cdot(s^2 \leftarrow PX) \rightarrow (s^1 \leftarrow PY),$$

где $X$ может варьироваться как нечто данное, а выбор $Y$ зависит от характера $X$. Например, из высказываний

«$(\forall s^1)$ $(\forall s^2)$ ($s^1$ вдвое больше $s^2$)» и «$s^1$ имеет величину $10\alpha$» ($\alpha$ — какие-то единицы измерения) следует «$s^2$ имеет величину $5\alpha$». Выводы такого рода правомерны лишь постольку, поскольку для таких отношений имеют силу утверждения типа

$$(\forall s^1)(\forall s^2)(s^1 R s^2) \equiv (|y| \Leftarrow f^1(|x|) \cdot (|x| \Leftarrow f^2(|y|),$$

где $f^1$ и $f^2$ могут быть тождественны (например, в случае отношений равенства), $s^1$ входит в $X$ и свободно в нем, $s^2$ входит в $Y$ и свободно в нем.

## § 20. Функция от времени и пространства

В науке употребляются функции, аргументами которых являются интервалы и моменты времени, области пространства, положения в пространственных рядах и т. д. Это — удобное средство описания изменений (процессов).

## § 21. Порядок событий

Если объектами являются события, фиксируемые высказываниями, то строятся порядковые высказывания типа «$X$, и в отношении $R$ к этому (т. е. к $|x|$) $Y$». Например, «$X$, и одновременно с этим (вслед за этим, за столько-то времени до этого, на таком-то расстоянии от этого и т. д.) $Y$». В таких высказываниях $R$ есть обозначение отношений порядка событий в пространстве и времени, интервалов между ними, направлений рядов, элементами которых они являются, и т. д., одним словом — положения $[y]$ в пространстве и времени относительно $|x|$. Будем вторую часть рассматриваемых высказываний изображать символами типа

$$(Rx)Y.$$

Если $X$ и $Y$ суть высказывания, то $(Rx)\,Y$ есть высказывание ($D1$).

Знак $Rx$ есть обозначение места $|y|$ во времени и пространстве относительно $|x|$, и только. Если при этом употребляются какие-то другие термины пространства и времени, то они каким-то образом входят в $X$ или $Y$. Например, в высказывании «В Москве $Z$, и через сутки после этого в Ленинграде $U$» лишь выражение «через сутки после этого» есть $Rx$, а $X$ и $Y$ суть соответственно «В Москве $Z$» и «В Ленинграде $U$».

Часто $Rx$ не формулируют явно. Обычно его опускают, когда для обоих событий $|x|$ и $|y|$ предполагается один и тот же временной интервал и одна и та же область пространства, а порядок событий передается другими частями высказываний. Если $Rx$ входит в высказывание, где ему предшествует $X$, последнее может не входить в $Rx$: его заменяют слова «это», «этим» и т. п., указывающие на предшествующее $X$. Но $(Rx)\,Y$ есть самостоятельное высказывание лишь тогда, когда $X$ входит в $Rx$.

Высказывания с $Rx$ обладают следующими свойствами:

*A 1.* $\sim (R\,x)\,Y \dashv\vdash (R\,x) \sim Y$

*A 2.* $(R\,x)\,Y^1 \cdot (R\,x)\,Y^2 \dashv\vdash (R\,x)\,(Y^1 \cdot Y^2)$

*A 3.* $(R\,x)\,Y^1 : (R\,x)\,Y^2 \dashv\vdash (R\,x)\,(Y^1 : Y^2)$

$(R\,x)\,Y^1 \ldots : (R\,x)\,Y^n \dashv\vdash (R\,x)\,(Y^1 : \ldots : Y^n)$

*A 4.* $(s^1\,R^1\,s^2 \to s^2\,R^2\,s^1) \to ((R^1\,x)\,Y \to (R^2\,y)\,X)$

*A 5.* $\sim (X \vdash (R\,x)\,Y)$.

Значения истинности $(Rx)Y$ устанавливаются так. Выбирается место в пространстве и времени, в котором $X$ истинно, и устанавливается значение истинности $Y$ в соответствующем месте относительно $|x|$, заданном $R$. Если при этом $Y$ истинно, то $(Rx)\,Y$ истинно (*D1*); если $\sim Y$ истинно, то $(Rx)\,Y$ ложно (*D2*). Если же выбрать место, когда $X$ истинно, нельзя, то $(Rx)\,Y$ непроверяемо (*D3*).

Место $|y|$ может быть задано относительно двух и более различных событий $|x^1|, \ldots, |x^n|$. Благодаря этому получаются высказывания

$$((R^1\,x^1)\,(R^2\,x^2))\,Y$$

$$((R^1\,x^1)\,(R^2\,x^2) \ldots (R^n\,x^n)\,Y,$$

читаемые как «$Y$ в отношении $R^1$ к $|x^1|, \ldots, R^n$ к $|x^n|$». Условием истинности таких высказываний является сама возможность положения каких-то событий относительно $|x^1|, \ldots, |x^n|$, заданного посредством $R^1, \ldots, R^n$ (последние могут быть такими, что задаваемое ими положение вообще невозможно, и тогда высказывание непроверяемо).

*A 6.* $(R^1\,x^1)\,(R^2\,x^2)\,Y \equiv (R^1\,x^1)\,Y \cdot (R^2\,x^2)\,Y$.

Из высказываний с $Rx$ образуются, в свою очередь, термины событий по такому правилу:

1) если $Z$ есть $(Rx)\,Y$, то $|\,z\,|$ есть $|\,y\,(Rx)\,|$, читаемый как «$|\,y\,|$, которое имеет место в отношении $R$ к $|\,x\,|$;

2) аналогично образуются термины $|\,y\ \ ((R^1x^1)\cdot\ldots\cdot(R^nx^n))\,|$. Теперь положение событий может быть задано относительно событий только что рассмотренного вида, и получаются высказывания

$$(R^1\,(y\,(R^2\,x)))\,Z,\ \ (R^1\,(y\,((R^2\,x)\,(R^3\,z)))\,U$$

и т. п. Для такого рода высказываний по правилам логики отношений и по определениям $R^1$, $R^2$, $R^3$,... имеют силу утверждения типа

$$(R^1\,(y\,(R^2\,x)))\,Z\rightarrow(R^3\,x)\,Z$$
$$(R^1\,(y\,((R^2\,x)\,(R^3\,z)))\,U\rightarrow(R^4\,x)\,(R^5\,z)\,U.$$

В $Rx$ высказывание $X$ может быть $X^1\cdot X^2$, $X^1:X^2$, $X^1:X^2:\ldots:X^n$. Для таких случаев имеют силу утверждения:

*A 7.* $(R\,(x\cdot y))\,Z\equiv(R\,x)\,(R\,y)\,Z$

*A 8.* $(R\,(x:y))\,Z\equiv(R\,(x\cdot\sim y))\,Z:(R\,(\sim x\cdot y))\,Z$

$$(R\,(x^1:\ldots:x^n))\,Z\equiv$$
$$(R\,(x^1\cdot\sim x^2\cdot\ldots\cdot\sim x^n))\,Z:\ldots:(R(x^n\cdot\sim x^1\cdot\ldots\cdot\sim x^{n-1}))\,Z.$$

# УСЛОВНЫЕ ФОРМЫ

## § 1. Условные высказывания

К условным высказываниям относят высказывания, обычно записываемые в форме «Если $X$, то $Y$». Их интуитивный смысл таков: приняв (признав истинным) $X$, исследователь должен принять и $Y$. Будем их изображать (как и выше) символом

$$X \to Y.$$

Высказывание $X$ при этом называют антецедентом, а $Y$ — консеквентом (*D1*). Отрицания и неопределенность для таких форм будем писать символами

$$X \urcorner\!\to Y, \quad \sim(X \to Y), \quad X\,?\!\to Y.$$

Рассмотренные в предшествующих главах правила логики распространяются и на эти формы благодаря определению:

*D2*. Если $X$ и $Y$ суть высказывания, то $X\alpha \to Y$ есть высказывание, где $\alpha$ означает наличие внутреннего отрицания или неопределенности или отсутствие таковых.

Условные высказывания можно разделять на группы по различным признакам: 1) универсальны или локальны антецеденты и консеквенты; 2) входят или нет в консеквент знаки $Rx$; 3) получаются или нет из логического следования. Оказывается, между этими признаками имеется связь, и вполне достаточным является деление, устанавливаемое следующими определениями:

*D3*. Высказывания $X \to Y$, в которых $Y$ не содержит $Rx$ (и последний не предполагается контекстом), и их отрицания образуют квазиследование.

*D4*. Высказывания $(X \to (Rx)\, Y)/v$, где $Rx$ фиксирует положение $|\,y\,|$ в пространстве и времени относительно $|\,x\,|$, а $v$ — условия, суть высказывания о физическом следовании.

## § 2. Квазиследование

Высказывания квазиследования получаются следующими путями:

1) как первичные соглашения;

2) из отношений логического следования высказываний;

3) по правилам логики из других высказываний того же рода.

В пункте 2 имеется в виду получение высказываний по схеме, определяемой утверждениями:

*A1*. Если из $X \cdot Z$ логически следует $Y$, и при этом $Z$ истинно или пусто (отсутствует), то $X \rightarrow Y$.

*A2*. Если для любого истинного $Z$ из $X \cdot Z$ логически не следует $Y$, то $X \urcorner \rightarrow Y$.

*A3*. $\sim (X \rightarrow Y) \equiv (X \urcorner \rightarrow Y)$

(Неопределенности здесь исключены самим способом построения высказываний).

Утверждения *A1* и *A2* можно записать в такой форме:

*A1*. $(X \vdash Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$,

$(X \cdot Z \vdash Y) \cdot Z \rightarrow (X \rightarrow Y)$

*A2*. $\sim (X \cdot Z \vdash Y) \cdot Z \rightarrow (X \urcorner \rightarrow Y)$.

Значения истинности для квазиследования определяются в зависимости от способа их построения:

*D1*. Если $X \rightarrow Y$ принято по соглашению, то оно считается истинным.

*D2*. Если из $X \cdot Z$ логически следует $Y$, где $Z$ истинно или пусто, то $X \rightarrow Y$ истинно.

*D3*. Если для любого истинного $Z$ из $X \cdot Z$ логически не следует $Y$, то $X \rightarrow Y$ ложно.

Прочие значения истинности здесь не требуются. Определить значения истинности $X \rightarrow Y$ через значения истинности $X$ и $Y$ здесь невозможно по тем же причинам, по каким логическое следование не есть функция истинности посылок и заключений. Утверждение «Если $X$ истинно и $Y$ ложно, то $X \rightarrow Y$ ложно» имеет силу как следствие свойств логического следования и не является показателем того, что $X \rightarrow Y$ есть функция истинности $X$ и $Y$.

## § 3. Дедуктивные свойства квазиследования

Дедуктивные правила квазиследования определяются такими утверждениями, добавляемыми к изложенным в предшествующих главах правилам логического следования:

*A 1.* $(X \to Y) \cdot X \vdash Y$

*A 2.* $(X \to Y) \vdash (\sim Y \to \sim X)$

*A 3.* $(X \to Y) \cdot (Y \to Z) \vdash (X \to Z)$

*A 4.* $(X \cdot Y \to Z) \dashv\vdash (X \to (Y \to Z))$

*A 5.* $(X \to Y \cdot Z) \dashv\vdash (X \to Y) \cdot (X \to Z)$

*A 6.* $(X : Y \to Z) \dashv\vdash (X \cdot \sim Y \to Z) \cdot (\sim X \cdot Y \to Z)$

$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash (X^1 \cdot \sim X^2 \cdot \ldots \cdot$
$\ldots \cdot \sim X^n \to Y) \cdot (X^2 \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n \to Y) \cdot \ldots \cdot (X^n \cdot$
$\cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1} \to Y)$

$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash (X^1 \cdot \sim X^2 \cdot \ldots \cdot$
$\cdot \sim X^n \to Y) \cdot (\sim X^1 \cdot (X^2 : \ldots : X^n) \to Y)$

$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash ((X^1 : \ldots : X^k) \cdot (\sim X^{k+1} \cdot$
$\cdot \ldots \cdot \sim X^n) \to Y) \cdot ((\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^k \cdot (X^{k+1} : \ldots :$
$: X^n) \to Y)$

*A 7.* $X \to (Y : Z) \dashv\vdash (X \to Y) : (X \to Z)$

$(X \to (Y^1 : Y^2 : \ldots : Y^n) \dashv\vdash (X \to Y^1) : (X \to Y^2) : \ldots :$
$: (X \to Y^n)$

*A 8.* $(X \to Y) \vdash (\forall | x |) (X \to Y)$

*A 9.* $X \cdot Y \vdash \sim (X \to \sim Y)$

*A 10.* $(X \vdash Y) \to (\vdash (X \to Y))$

Следствия *A1 — A10*:

*T 1.* $\vdash (\sim X \cdot X \to Y)$, $\vdash (Y \to \sim (\sim X \cdot X))$
$\vdash (X \to (Y \to X))$, $\vdash (X \to (\sim X \to Y))$

*T 2.* $(\vdash (X \supset Y)) \to (\vdash (X \to Y)$

Как видим, квазиследование обладает свойствами, аналогичными «парадоксам» материальной импликации; но полного совпадения здесь нет. В частности, $\sim((X \to Y) \to (X \supset Y))$.

*T 3.* $(X : Y) \leftrightarrow (X \to \sim Y) \cdot (\sim X \to Y)$

*T 4.* $X \to ((X \to \sim Y) \to \sim (X \to Y))$

## § 4. Условия

Прежде чем перейти ко второму виду условных высказываний, уточним термин «условия» (или «условие»).

Надо различать логические и эмпирические условия. Первые определяются такими соглашениями:

*D1.* $|x|$ есть активное условие $|y|$, если и только если $X \to Y$.

*D2.* $|x|$ есть пассивное условие $|y|$, если и только если $\sim X \to \sim Y$.

*D3.* $|x|$ есть полное условие $|y|$, если и только если $(X \to Y) \cdot (\sim X \to \sim Y)$.

*D4.* $|x^1|, \ldots, |x^n|$ суть достаточные условия $|y|$ $(n \geqslant 1)$, если и только если $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \to Y$.

*D5.* $|x^1|, \ldots, |x^n|$ суть необходимые условия $|y|$, если и только если $\sim (X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \to Y)$, где $X_1, \ldots, X_{n-1}$ суть любые $n - 1$ высказывания из $X^1, \ldots, X^n$.

Когда речь идет об эмпирических условиях, то имеется в виду нечто принципиально иное. Эмпирическое событие выбирается всегда в некоторой пространственно-временной области. Все прочие события этой области суть эмпирические его условия или среда (*D6*). Они предполагаются неявно или частично фиксируются в особых высказываниях. В последнем случае получаются высказывания типа «$X$ при том условии, что $V$», где $V$ есть некоторая совокупность высказываний об эмпирических событиях, отличных от $|x|$, об их упорядоченности, об их порядке относительно $|x|$ и т. д. Будем такие высказывания изображать символами типа

$$X/v.$$

Никакой логической связи между $X$ и $V$ в случае $X/v$ нет. Однако фиксирование эмпирических условий имеет существенное значение при установлении логических связей высказываний об эмпирических объектах.

Высказывания $X/v$ суть частный случай ранее рассмотренных высказываний со сложным субъектом вида «$s$ выбранный при том условии, что $V$» (обозначим символом $s/v$). Поэтому $V$ можно рассматривать как обособившуюся часть субъекта, вынесенную во вне. Для нее имеют силу утверждения:

*A1.* $X/v \cdot Y/v \equiv (X \cdot Y)/v$

$A\,2.\ \ X^1/v : Y/v \equiv (X : Y)/v$

$X^1/v : X^2/v : \ldots : X^n/v \equiv (X^1 : X^2 : \ldots : X^n)/v$

$A\,3.\ \ (\alpha \,\text{ꟸ}\, s/v)\,(s/v \leftarrow P\,X) \equiv ((\alpha \,\text{ꟸ}\, s)\,(s \leftarrow P\,X))/v$

$A\,4.\ \ (X/v \rightarrow (R\,x)\,Y/v) \equiv (X \rightarrow (R\,x)\,Y)/v$

Эти правила выноса условий позволяют упрощать высказывания, вынося тождественные знаки условий в «контекст» и избегая их повторений.

Сказанное можно рассматривать как пример того, что введенные выше формы отрицаний не охватывают всех возможных случаев. Так, если нужно сказать, что $X$ не при том условии что $V$, а при каком-то другом, то этими отрицаниями воспользоваться нельзя.

## § 5. Физическое следование

Высказывания о физическом следовании получаются как первичные соглашения и по правилам логики из других высказываний того же рода. Но их нельзя получить из отношений логического следования по схеме, аналогичной схеме получения квазиследования, так как для них имеет силу утверждение:

*A1.* Для любого $Z$, если из $Z$ логически не следует $(Rx)Y$ и не следует $X \rightarrow (Rx)\,Y$, то из $X \cdot Z$ логически не следует $(Rx)\ Y$.

Если высказывания о физическом следовании не являются первичными соглашениями и не выводятся из других аналогичных высказываний, то общая схема их построения имеет такой вид:

1) наблюдается $|x|$

2) наблюдается $|y|$ в пространственно-временном отношении $R$ к $|x|$;

3) указанное в пунктах 1 и 2 имеет место каждый раз, т. е. для всех $|x|$;

4) указанное в пунктах 1—3 имеет место в одних и тех же условиях $|v|$;

5) сокращением всего этого является $(X \rightarrow (Rx)\ \ Y)/v$ или $X/v \rightarrow (Rx)Y/v$.

Сказанному соответствуют утверждения (знак условий опускаем, но он везде предполагается):

$A\,2.\ \ (X \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow (\forall\,|\,x\,|)\,((R\,x)\,Y)$

$A\,3.\ \ (X \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow N\,|(R\,x)\,y\,|$

Отрицания и неопределенность (а здесь она возможна) определяются утверждениями:

$A\,4.\ (X \neg \rightarrow (R\,x)Y) \leftrightarrow (\neg \forall \,|\, x \,|)\,((R\,x)\,Y)$

$A\,5.\ (X \neg \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow M\,|(R\,x) \sim y\,|$

$A\,6.\ (X\,? \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow (?\,\forall\,|\,x\,|)\,((R\,x)\,Y$

$A\,7.\ (X\,? \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow ?\,M\,|(R\,x) \sim y\,|$

Следствия $A2 — A7$:

$T\,1.\ (X \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow \neg\,M\,|\,(R\,x) \sim y\,|$

$T\,2.\ (X \neg \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow (\exists\,|\,x\,|)\,((R\,x) \sim Y)$

$T\,3.\ \sim (X \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow \sim (\forall\,|\,x\,|)\,((R\,x)\,Y)$

$T\,4.\ \sim (X\,\alpha \rightarrow (R\,x)\,Y) \leftrightarrow (X_{\beta} \rightarrow (R\,x)\,Y)\,:$
$(X\,\gamma \rightarrow (R\,x)\,Y),$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ имеют смысл, аналогичный их смыслу в соответствующих случаях выше.

$T\,5.\ \sim ((X\,\alpha \rightarrow (R\,x)\,Y) \cdot (X_{\beta} \rightarrow (R\,x)\,Y)\,,$

где $\alpha$ и $\beta$ различны в любых комбинациях.

Частный случай приведенной схемы — для всех $|\neg x| \Rightarrow |x|$ наблюдается $|\neg x| \Rightarrow |x|$ и наблюдается $|\neg\,y| \Rightarrow |y|$ в отношении $R$ к $|\neg\,x\,| \Rightarrow |x|$, что и сокращается в высказывании $(|\neg\,x\,| \Rightarrow |\,x\,|) \rightarrow (R)(|\neg y| \Rightarrow |y|)$. Отношение рассмотренных высказываний определяется утверждением:

$A\,8.\ ((|\neg\,x\,| \Rightarrow |\,x\,|) \rightarrow (R\,x)\,(|\neg\,y\,| \Rightarrow |\,y\,|)) \rightarrow$
$(X \rightarrow (R\,x)\,Y)$

Но когда именно исследователь имеет право сказать «каждый раз», «для всех $|x|$» или «для всех $|\neg\,x| \Rightarrow |x|$»? Указать здесь всеобщие рекомендации, подобные правилам логического следования, невозможно. Утверждая это, мы не столько учитываем печальный опыт истории логики на этот счет, сколько самую суть дела: принудительная сила правил логического следования есть принудительная сила соглашений людей относительно свойств логических знаков и содержащих их структур высказываний; в рассматриваемом же случае приходится иметь дело с отражением мира, который не зависит от конвенции.

Прежде всего надо сказать, что в познании существенную роль играет удача. В мире встречаются случаи, когда

$|y|$ существует в отношении $R$ к $|x|$ при любых условиях. И если исследователь после нескольких наблюдений принимает $X \rightarrow (Rx)Y$, последнее становится элементом научных знаний несмотря на отсутствие каких бы то ни было логических оснований для этого. Встречаются, далее, случаи, когда $|y|$ существует в отношении $R$ к $|x|$ всегда при определенных условиях. А условия эти всегда даны в опыте исследователя (например, существование Земли, поля тяготения, воздуха и т. п.). Причем, роли не играет известны они исследователю или нет. Судьба $X \rightarrow (Rx)\, Y$ в таких случаях аналогична тому, что говорилось выше.

Имеются, далее, некоторые эвристические принципы, которые в практическом исполнении дают иногда положительный эффект, иногда — нет. К их числу относятся известные индуктивные методы Бэкона — Милля. Поскольку эти эвристические принципы хотя бы иногда дают возможность получить истинные высказывания, их применение вполне оправдано. Что же касается ошибок, то занятие наукой стало бы самым заурядным делом, если бы ученые их не делали.

Возьмем такой пример. Пусть в некоторой пространственновременной области сначала осуществляется $|\neg|x| \Rightarrow |x|$, а затем— $|\neg|y| \Rightarrow |y|$. Если при этом все остальное в ограниченной нами области остается неизменным, то мы вправе принять $(|\neg\, x| \Rightarrow |\, x\,|) \rightarrow (Rx)\, (|\neg|y\,| \Rightarrow |y\,|)$, где $Rx$ есть «вслед за этим». В практическом же исполнении этого принципа постоянство «всего остального» — дело немыслимое, и судьба нашего высказывания зависит от того, насколько остающееся на самом деле неизменным близко ко «всему остальному».

## § 6. Значения истинности

В случае квазиследования определения значений истинности совпадают с описанием способа построения высказываний. Для физического следования такого совпадения нет. Так, представляется правомерным следующее определение: $[X \rightarrow (Rx)Y] \leftarrow v^1$, если только если каждый раз, когда истинно $X$, истинно и $Y$ в отношении $R$ к $|x|$.

Однако $X \rightarrow (Rx)\, Y$ принимается как истинное вовсе не потому, что пересмотрены все случаи, когда $X$ истинно, и убедились при этом в том, что $Y$ истинно в соответствующем месте. Если бы это было так, построение высказывания было бы лишено смысла. Оно было бы безупречно с логической точки зрения, но им нельзя было бы пользоваться в новых ситуациях, когда истинно $X$. Высказывание принимается в силу тех эвристических соображений, о которых мы говорили выше. При этом порой бывает достаточно рассмотрения одного случая, когда истинно $X$, а условное высказывание приобретает силу для любого числа случаев. И если после его принятия оно оправдывается в большом числе случаев, это не означает, что вопрос о его истинности может быть решен окончательно по крайней мере апостериори.

Определения значений истинности для физического следования можно построить различными способами и в частности — так (тождество условий предполагается):

$D\,1.\ [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1 \equiv M\,|\,x\,|\cdot \urcorner M\,||\,x\,|\,R\,|\sim y\,||$

$D\,2.\ [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^2 \equiv M\,|\,x\,|\cdot ?\,|M\,||\,x\,|\,R\,|\sim y\,||$

$D\,3.\ [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^3 \equiv \sim M\,|\,x\,|$

$D\,4.\ [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^4 \equiv M\,|\,x\,|\cdot M\,||\,x\,|\,R\,|\sim y\,||$

$D\,5.\ [X \urcorner] \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^4$

$D\,6.\ [X \urcorner] \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^2 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^2$

$D\,7.\ [X \urcorner] \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^3 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^3$

$D\,8.\ [X \urcorner] \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^4 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1$

$D\,9.\ [X\,? \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^2$

$D\,10.\ [X\,? \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^3 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^3$

$D\,11.\ [X\,? \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^4 \equiv [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1 :$
$\quad : [X \urcorner] \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1$

В практике науки бывает так, что $M\,|\,(Rx) \sim y\,|$, но $X \to (Rx)\,Y$ принимается как истинное, поскольку вероятность $|\,(Rx) \sim y\,|$ достаточно мала. Поэтому уместны определения:

$D^1 1.\ [X \to (R\,x)\,Y] \leftarrow v^1 \equiv M\,|\,x\,|\cdot(p\,|(R\,x)\,y\,| \geqslant \alpha),$

где $\alpha$ есть степень вероятности, достаточно близкая к единице.

$D^1 4.\ [X \to (Rx)\,Y] \leftarrow v^4 \equiv M\,|\,x\,|\cdot(p\,|(R\,x)\,y\,| \leqslant \beta),$

где $\beta$ есть степень вероятности, достаточно близкая к нулю

## § 7. Дедуктивные свойства физического следования

На физическое следование распространяются правила квазиследования с такими коррективами:

1) для всех событий, о которых говорится в одном утверждении, предполагается тождество условий (к утверждениям приписываются выражения «при одних и тех же условиях» или везде проставляется одинаковый знак условий);

2) последняя аксиома исключается, поскольку нет логических истин, являющихся высказываниями о физическом следовании;

3) во второй и третьей аксиоме вводятся дополнения, связанные со знаками порядка событий.

В результате аксиомы *A1* — *A9* примут такой вид:

$A\,1.\ (X \rightarrow (R\,x)\,Y)/v \cdot X/v \vdash (R\,x)\,Y/v$

$A\,2.\ (X \rightarrow (R^1\,x)\,Y)/v \cdot (s^1\,R^1\,s^2 \rightarrow s^2\,R^2\,s^1) \vdash (\sim Y \rightarrow$
$\rightarrow (R^2 \sim y) \sim X)/v$

$A\,3.\ (X \rightarrow (R^1\,x)\,Y)/v \cdot (Y \rightarrow (R^2\,y)\,Z)/v \cdot (s^1\,R^1\,s^2 \cdot$
$\cdot\, s^2\,R^2\,s^3 \rightarrow s^1\,R^3\,s^3) \vdash (X \rightarrow (R^3\,x)\,Z)/v$

$A\,4.\ (X \cdot Y \rightarrow (R\,x \cdot y)\,Z)/v \dashv\vdash (X \rightarrow (Y \rightarrow (R\,x \cdot y)\,Z)/v$

$A\,9.\ (X \cdot (R\,x)\,Y)\,/v \vdash \sim (X \rightarrow (R\,x) \sim Y)/v$

Аксиомы *A5* — *A8* отличаются от *A5* XIII3 — *A8* XIII3 лишь наличием одинакового знака условий в посылках и заключениях и наличием знаков $Ra$ после знака $\rightarrow$, где $a$ есть антецедент соответствующих высказываний.

Поскольку высказывание о физическом следовании не может быть истинным, если не может быть истинным его антецедент, то приемлемо утверждение:

$A\,10.\ (X \rightarrow (Rx) \sim Y) \vdash \sim (X \rightarrow (Rx)\,Y)$

Квазиследование же может иметь место и в случае всегда ложного антецедента, так что для него верно лишь более слабое утверждение *T5* XIII3.

Связь квазиследования и физического следования, если они встречаются совместно, устанавливается утверждениями:

$A\,11.\ (X \rightarrow (Rx)\,Y) \cdot (Y \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow (Rx)\,Z)$

$A\,12.\ (X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow (R\alpha)\,Z) \vdash (X \rightarrow (R\alpha)\,Z)$

$A\,13.\ (X \to (Rx)\,Y)\cdot((Rx)\,Y \to Z) \vdash (X \to Z)$

$A\,14.\ (X \to (R^1_\alpha)\,Y)\cdot((R^1_\alpha)\,Y \to (R^2_\beta)\,Z) \vdash (X \to (R^2_\beta)\,Z)$

Если принять утверждения

$A'1.\ (X \to Y) \dashv\vdash (X \to Y)/v$

$A'2.\ (X \to Y) \vdash (X \to (R\alpha)\,Y)$

$A'3.\ (X \to Y) \vdash ((R\alpha)\,X \to Y)$

(где $|v|$ есть любое условие, $|\alpha|$ есть любое событие, в $X$ и $Y$ не входит $R\alpha$), то утверждения *A1*, *A4* — *A9* и *A11* — *A14* получаются как следствия аксиом параграфа 3. В таком случае достаточно к *A'1*—*A'3* добавить *A2*, *A3* и *A10*.

Встречаются высказывания вида

$$(R^1x)\,Y \to (R^2x)\,Z$$

$$(R^1x^1)\,Y \to (R^2x^2)\,Z,$$

в которых порядок $|z|$ относительно $|y|$ выражен не прямо (посредством $Ry$), а косвенно, т. е. через отношение к $|x|$, $|x^1|$, $|x^2|$. Для них имеют силу утверждения:

$A\,15.\ ((R^1x)\,Y \to (R^2x)\,Z) \dashv\vdash (X\cdot(R^1x)\,Y \to (R^2x)\,Z)$

$A\,16.\ ((R^1x^1)\,Y \to (R^2x^2)\,Z) \dashv\vdash (X^1\cdot(R^1x^1)\,Y\cdot X^2 \to$
$\to (R^2x^2)\,Z)$

## § 8. Причина

В науке часто употребляются высказывания «$|x|$ есть причина $|y|$» и «$|x|$ есть следствие $|y|$». Термин «причина» (и производный от него «следствие») не является при этом однозначным, что порождает многочисленные и совершенно бесперспективные дискуссии. Но при всех вариациях его смысла общим является то, что высказывания такого рода суть сокращения некоторой совокупности высказываний.

Высказывание «$|x|$ есть причина $|y|$» употребляется, в частности, как сокращение для следующей совокупности высказываний: 1) $\sim X \to \sim Y$; 2) осуществляется $|\neg x| \Rightarrow |x|$; 3) затем (вслед за этим) осуществляется $|\neg y| \Rightarrow |y|$. Кроме того, здесь предполагается некоторая ограниченная пространственно-временная область, в которой наблюдаются события и изменения. Очевидно, между одновременными (в этой ограниченной области) событиями не может быть причинной связи.

Высказывание «$|x|$ есть причина $|y|$» употребляется также в смысле $(|\neg x| \Rightarrow |x|) \to (Rx)\ (|\neg y| \Rightarrow |y|)$, где $Rx$ есть «вслед за этим». В случае индивидуальных осуществившихся событий это высказывание употребляется иногда в смысле «Не было бы $|x|$, не было бы и $|y|$».

Встречается также следующее понимание причины: причина события $|y|$ — это все то, что порождает $|y|$ (все, что необходимо для появления $|y|$). При этом обычно смешивают реальное с отраженным, что ведет к неразрешимым противоречиям. В самом деле, для наступления любого эмпирического события реально требуется бесконечное множество других событий, и зафиксировать причину события практически невозможно. Однако в науке фиксируют лишь некоторые события, вслед за наступлением которых наступает интересующее нас событие. Все остальное совершается само собой, независимо от познания. Фиксируемые события суть своего рода метки для бесконечного множества событий, позволяющие делать некоторые прогнозы относительно наступления других событий. И если причиной называть какие-то события, зафиксированные в определенного рода высказываниях, то знание причин событий есть тривиальный факт науки.

Указанное выше право фиксировать в качестве причины не всю совокупность событий, предшествовавших наступлению $|y|$, а только ее «метки» (т. е. лишь некоторые из этих событий, допустим — $|x|$), базируется на том, что исследователю удается выбрать такое $|x|$, осуществление которого предполагает осуществление всех прочих событий, необходимых для наступления $|y|$:

$$X \cdot Z^1 \cdot \ldots \cdot Z^n \to (Rx)\, Y$$

$$X \to Z^1 \cdot \ldots \cdot Z^n$$

Иногда $|x|$ называют причиной $|y|$, если предполагается, что

$$(X \cdot Z \to (Rz)\, Y) \cdot (\sim X \cdot Z \to (Rz) \sim Y).$$

Одним словом, различные употребления слова «причина» свидетельствуют не о том, что кто-то прав, а кто-то не прав, но о том, что употребляются различные логические формы, в силу неопределенности логической терминологии называемые одним и тем же именем.

## § 9. Физическое следование и функции

Пусть построены высказывания

$$X^1 \to (R\,x^1)Y^1,\; X^2 \to (R\,x^2)\,Y^2,\; X^3 \to (R\,x^3)\,Y^3, \ldots .$$

Пусть $P^1$, $P^2$, $P^3$,... суть предикаты соответственно $X^1$, $X^2$, $X^3$,..., а $Q^1$, $Q^2$, $Q^3$,... — предикаты $Y^1$, $Y^2$, $Y^3$,.... Пусть, далее, найдено, что

$$Q \Leftarrow f(P),$$

где $P^i \in KP$ и $Q^i \in KQ$. В таком случае исходная совокупность высказываний может быть заменена на

$$X \to (R\,x)\,Y,$$

где $|\,x^i\,| \in K\,|x\,|$, $y^i\,| \in K\,|\,y\,|$, $y \Leftarrow f\,(|\,x\,|)$. Сокращенно это запишется символом

$$|\,(R\,x)\,y\,| \Leftarrow f\,(\,|\,x\,|\,).$$

Здесь $f$ подбирается с таким расчетом, чтобы для каждого $X^i$ строилось такое $Y^i$, что

$$X^i \to (R\,x^i)\,Y^i.$$

Если $X^i$ суть $X^i_1 \cdot \ldots \cdot X^i_n$ $(n \geqslant 1)$, то функция примет вид

$$|\,R\,(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)\,y\,| \Leftarrow f\,(\,|\,x_1\,|, \ldots, |\,x_n\,|\,).$$

Высказывания $|\,(Rx)\;y\,| \Leftarrow f\;(|\,x\,|)$ в силу самого способа их построения обладают тем свойством, что

$$(\,|\,(R\,x)\,y\,| \Leftarrow f\,(\,|\,x\,|\,))\cdot X^i \to (R\,x^i)\,Y^i.$$

Причем, высказывание $(Rx^i)Y^i$ может быть проверено (а значит и получено) независимо от $X^i$ и $(|\,Rx)\,y\,| \Leftarrow f\,(|\,x\,|)$.

Высказывание $X \to (Rx)\;Y$ можно рассматривать как частный случай высказываний $|\,(Rx)\,y\,| \Leftarrow f\;(|\,x\,|)$, где классы событий $|\,x\,|$ и $|\,y\,|$ характеризуются лишь тем, что $|\,x\,| \in K\,|\,x\,|$ и $y \in K\,|\,y\,|$, т. е. не дифференцируются по видам.

## § 10. Двузначные и многозначные функции

Функции двузначной и многозначной пропозициональной логики можно интерпретировать как частный случай функций рассмотренного выше типа (скажем, эмпирических функций). Эти функции обладают такими свойствами: задается некоторый класс объектов и класс признаков, которые могут быть им присущи; каждый объект такого рода обязательно имеет какой-то из этих признаков, но в данное время — только один из них (признаки исключают друг друга). Пропозициональные переменные логики интерпретируются как объекты такого рода, их значения — как возможные признаки этих объектов, пропозициональные функции — как эмпирические зависимости состояний одних объектов от состояний других объектов. Знак $Rx$ опускается, поскольку предполагается одновременность или последовательность событий.

Рассмотрим в качестве примера функции двузначной логики. Пусть задан класс объектов таких, которые могут иметь признаки $P^1$ и $P^2$, и только эти. Для любых объектов из заданного класса имеют силу утверждения:

1) $\sim(s \leftarrow P^1) \equiv (s \urcorner \leftarrow P^1)$, $\sim(s \leftarrow P^2) \equiv (s \urcorner \leftarrow P^2)$

2) $(s \leftarrow P^1) \rightarrow \sim(s \leftarrow P^2)$, $\sim(s \leftarrow P^1) \rightarrow (s \leftarrow P^2)$.

Вместо второго утверждения можно принять

$$(s \leftarrow P^1) : (s \leftarrow P^2).$$

Между объектами рассматриваемого класса могут иметь место различного рода зависимости, например — такие.

*D1*. Объекты $s^1$ и $s^2$ «отрицают» друг друга, если и только если

$$(s^1 \leftarrow P^1) \rightarrow (s^2 \leftarrow P^2),\ (s^2 \leftarrow P^1) \rightarrow (s^1 \leftarrow P^2),$$
$$(s^1 \leftarrow P^2) \rightarrow (s^2 \leftarrow P^1),\ (s^2 \leftarrow P^2) \rightarrow (s^1 \leftarrow P^1).$$

*T1*. Если $s^1$ и $s^2$ «отрицают» друг друга, то

$$(s^1 \leftarrow P^1) \rightarrow \sim(s^2 \leftarrow P^1),\ (s^1 \leftarrow P^2) \rightarrow \sim(s^2 \leftarrow P^2),$$
$$(s^2 \leftarrow P^1) \rightarrow \sim(s^1 \leftarrow P^1),\ (s^2 \leftarrow P^2) \rightarrow \sim(s^1 \leftarrow P^2).$$

*T 2*. $((s^1 \leftarrow P^1) : (s^2 \leftarrow P^1)) \cdot ((s^1 \leftarrow P^2) : (s^2 \leftarrow P^2))$

*D2*. Объекты $s^1$ и $s^2$ образуют «конъюнкцию» относительно $s^3$, если и только если

$$(s^1 \leftarrow P^1) \cdot (s^2 \leftarrow P^1) \leftrightarrow (s^3 \leftarrow P^1)$$
$$(s^1 \leftarrow P^1) \cdot (s^2 \leftarrow P^2) \rightarrow (s^3 \leftarrow P^2)$$
$$(s^1 \leftarrow P^2) \cdot (s^2 \leftarrow P^1) \rightarrow (s^3 \leftarrow P^2)$$
$$(s^1 \leftarrow P^2) \cdot (s^2 \leftarrow P^2) \rightarrow (s^3 \leftarrow P^2)$$
$$(s^3 \leftarrow P^2) \rightarrow ((s^1 \leftarrow P^1) \cdot (s^2 \leftarrow P^2) : (s^1 \leftarrow P^2) \cdot (s^2 \leftarrow P^1) :$$
$$: (s^1 \leftarrow P^2) \cdot (s^2 \leftarrow P^2))$$

Аналогичным образом интерпретируются прочие функции. Собственно говоря, это есть запись таблиц истинности в иной терминологии, и только.

## § 11. Эмпирические связи

*D1*. Будем говорить, что $|x|$ и $|y|$, фигурирующие в $X \rightarrow (Rx)\, Y$ и $|(Rx)y| \Leftarrow f\,(|x|)$, находятся в эмпирической связи (или образуют эмпирическую связь). Будем также говорить, что $|x|$ находится в эмпирической связи с $|y|$ (и $|y|$ с $|x|$). Аналогичный смысл будут иметь выражения, в которых вместо $|x|$ и $|y|$ фигурируют лишь $s^1$ и $s^2$, входящие в них. Характер связи событий $|x|$ и $|y|$ задается знаками $R$ и $f$, а характер связи объектов $s^1$ и $s^2$ определяется кроме этого еще остальными частями $X$ и $Y$. События $|x|$ и $|y|$ (объекты $s^1$ и $s^2$) суть элементы связи.

Таким образом, ответом на вопрос «Как связаны события $|x|$ и $|y|$ (или объекты $s^1$ и $s^2$)?» являются высказывания $X \rightarrow (Rx)\, Y$ и $|(Rx)\, y| \Leftarrow f\,(|x|)$. Однако в обиходе науки на подобные вопросы часто отвечают, называя другие события и объекты, обладающие следующим свойством: можно построить высказывания $Z^1, \ldots, Z^n$ $(n \geqslant 1)$ такие, что

$$(X \rightarrow (R^1 x)\, Z^1) \cdot (Z^1 \rightarrow (R^2 z^1) Z^2) \cdot \ldots \cdot (Z^{n-1} \rightarrow (R^n z^{n-1})\, Z^n) \cdot$$
$$\cdot (Z^n \rightarrow (R^{n+1} z^n)\, Y) \rightarrow (X \rightarrow (Rx)\, Y).$$

В этом случае можно употреблять выражение «механизм» связи (*D2*). Таким образом, ответом на вопрос о том, каков механизм связи $|x|$ и $|y|$ (соответственно $s^1$ и $s^2$), является антецедент только что приведенного высказывания. Иногда в таких случаях отвечают сокращенно, просто перечисляя фигурирующие в $Z^i$ объекты. Но это не меняет сути дела.

*D3*. Множество события $|x^1|, \ldots, |x^n|$ (объектов $s^1, \ldots, \ldots, s^n$; $n \geqslant 2$) образует эмпирическую систему связей, если и только если для каждого $|x^i|$ $(s^i)$ из этого множества найдется по крайней мере одно такое $|x^k|$ (один такой $s^к$) из того же множества событий (объектов), которое (который) находится с ним в эмпирической связи. Связи, образующие данную систему, суть ее элементы.

Те эмпирические системы связей, которые фактически исследуются в науках, характеризуются более узким понятием изолированной эмпирической системы связей (для краткости будем говорить об изолированной системе). При этом имеется в виду следующее (*D4*): в некоторой (каким-то образом ограниченной) пространственно-временной области задается некоторое множество событий (объектов), и рассматривается система только из этих событий (объектов), т. е. все прочие события (объекты) во внимание не принимаются; если же какие-то из прочих событий (объектов) принимаются во внимание, то тем самым рассматривается «расширенная» (сравнительно с исходной) система, но так или иначе изолированная. И это вполне естественно, ибо «нельзя объять необъятное». Отдельные связи теперь рассматриваются как элементы изолированных систем. Для всех элементов системы предполагаются одни и те же условия самой системы.

*D5*. Связь является непосредственной, если для нее нельзя (в данной системе, разумеется) указать другие связи данной системы, образующие ее механизм, и косвенной, если это возможно.

*D6*. Связь является простой, если не может быть представлена как система из двух или более различных связей, и сложной в противном случае.

Основная проблема исследования эмпирических систем — отыскание таких простых и непосредственных связей, из высказываний о которых можно было бы получать высказывания о любых сложных и косвенных связях данной системы, а также изобретение правил для этого. Две операции при этом представляют интерес — изоляция отдельных связей (анализ системы) и объединение (синтез) их в сложные связи.

Анализ системы характеризуется понятием изолированной связи (связи в чистом виде, связи как таковой и т. д.), которое мы определим следующим образом (*D7*).

Для простоты допустим, что $R$, $R^1$, $R^2$,... каким-то образом фиксируют положение событий, фигурирующих в консеквенте, относительно событий, фигурирующих в антецеденте. Пусть

$$|(R)\,y| \Leftarrow f(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

$$|(R)\,(y_1 \cdot \ldots \cdot y_m)| \Leftarrow f(|x_1|)$$

$$|(R)\,(y_1 \cdot \ldots \cdot y_m)| \Leftarrow f(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

суть высказывания, фиксирующие какие-то связи данной системы. Мы допускаем, что в каждой области исследования могут быть установлены такие $X_1^*, \ldots, X_n^*$, что $|x_1^*| \in K|x_1|, \ldots, |x_n^*| \in K|x_n|$, и высказывания

$$|(R)\,y| \Leftarrow f_1(|x_1|, |x_2^*|, |x_n^*|)$$
$$|(R)\,y| \Leftarrow f^2(|x_2|, |x_1^*|, \ldots, |x_n^*|)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|(R)\,y| \Leftarrow f^n(|x_n|, |x_1^*|, \ldots, |x_{n-1}^*|)$$

называются высказываниями об изолированных связях (о связях в чистом виде) относительно

$$|(R)\,y| \Leftarrow f(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Аналогично для $Y_1, \ldots, Y_m$; аналогично для $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ совместно. Высказывания $X_i^*$ и $Y_j^*$ суть условия изоляции. Пример таких высказываний — высказывания о том, что соответствующие объекты не изменяются, не существуют, не влияют на другие объекты и т. п.

Под синтезом изолированных связей в сложные имеем в виду ($D8$) отыскание таких правил, благодаря которым становятся возможными высказывания

$$(|(R)\,y| \Leftarrow f^1(|x_1|, |x_2^*|, \ldots, |x_n^*|)) \cdot (|(R)\,y| \Leftarrow$$
$$\Leftarrow f^2(|x_2|, |x_1^*|, \ldots, |x_n^*|)) \rightarrow (|(R)\,y| \Leftarrow$$
$$\Leftarrow f^3(|x_1|, |x_2|, |x_3^*|, \ldots, |x_n^*|));$$

аналогично для трех и более аргументов; аналогично для двух и более $Y_1, \ldots, Y_m$; аналогично для $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ совместно. Отыскание упомянутых правил означает принятие (явно или неявно) некоторых допущений относительно данной системы, которые имеют внелогическую природу.

## § 12. Объяснение

*D1*. Объяснить совокупность событий $|y^1|, \ldots, |y^m|$ ($m \geqslant 1$) — значит найти (выбрать из числа имеющихся или построить новые, допустить) такие $X^1, \ldots, X^n$ ($n \geqslant 1$), что

$$X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \rightarrow Y^1, \ldots, X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \rightarrow Y^m.$$

## § 13. Контрфактические высказывания

Контрфактическими называют высказывания вида «Если бы было (не было) $X$, то было бы (не было бы ) $Y$». Они являются сокращениями для

$$X \cdot (Rx)\, Y \cdot (\sim X \urcorner\!\!\rightarrow (R \sim x) \sim Y)$$
$$X \cdot Y \cdot (\sim X \rightarrow \sim Y).$$

## § 14. Условные высказывания и индивидуальные события

Для индивидуальных $|x|$ и $|y|$ условные высказывания имеют силу либо благодрая общему принципу

$$(X \rightarrow (Rx)\, Y)\, (t^2/t^1) \cdot (t^2 \in Kt^1) \vdash (X \rightarrow (Rx)\, Y$$
$$(X \rightarrow Y)\, (t^2/t^1) \cdot (t^2 \in Kt^1) \vdash (X \rightarrow Y),$$

либо благодаря рассуждению, в котором из $X$ и некоторой совокупности высказываний $Z$, считаемых истинными, получается $Y$.

## § 15. Условность и общность

Между квантором общности и знаком условности имеет место связь, определяемая утверждениями:

*A1.* $(\forall s)\, X \leftrightarrow ((s^* \in Ks) \leftarrow (s^* \leftarrow PX\, (s/s^*))$

*A2.* $((s \leftarrow PX) \rightarrow (s \leftarrow PY)) \leftrightarrow (\forall s \downarrow PX)\, (s \downarrow PX \leftarrow PY)$

Кроме того, из эр-высказываний

$$(\forall\, s^1, s^2))\, (s^1\, \alpha\, R\, s^2),$$

где $R$ есть отношение сравнения или порядка, получаются высказывания

$$(s^1 \leftarrow P\, X^i) \rightarrow (s^2 \leftarrow P\, Y^i)$$
$$(s^2 \leftarrow PY^k) \rightarrow (s^1 \leftarrow P\, X^k),$$

где $Y^i$ и $X^k$ зависят от характера $R$, $X^i$ и $Y^k$. Получение это осуществляется в силу смысла $R$ и терминов, фигурирующих в $X^i$ и $Y^i$. Так что эти эр-высказывания обладают свойствами, сходными с высказываниями

$$\downarrow(s^1 \leftarrow P\, X) \Leftarrow f^1(\downarrow(s^2 \leftarrow P\, Y))$$
$$\downarrow(s^2 \leftarrow P\, Y) \Leftarrow f^2\, (\downarrow(s^1 \leftarrow P\, Y))$$

или (что то же)

$$|x| \Leftarrow f^1(|y|)$$
$$|y| \Leftarrow f^2(|x|).$$

Это позволяет сформулировать следующий принцип: для всякого $(\forall\ (s^1,\ s^2))\ (s^1 \alpha\ R\ s^2)$ могут быть найдены такие $|x| \Leftarrow f^1(|y|)$ и $|y| \Leftarrow f^2(|x|)$, что в силу смысла $R$ и терминов, входящих в $X$ и $Y$,

$$(\forall)\ s^1, s^2))\ (s^1\, \alpha\, R\, s^2) \leftrightarrow (|x| \Leftarrow f^1(|y|)) \cdot (|y| \Leftarrow f^2(|x|))$$

Этот принцип позволяет в ряде случаев принимать условные высказывания как общие эр-высказывания, и наоборот (употребляя вместо $\rightarrow$ знаки следования или тождества по смыслу).

# ТЕОРИИ

## § 1. Теория

Термины и высказывания в науке объединяются в комплексы. В логической теории научных знаний обычно рассматриваются такие из них, которые образуются по правилам логического следования и замены терминов и называются теориями. Ниже мы в крайне сжатом виде остановимся лишь на некоторых фундаментальных вопросах, относящихся к теориям.

Теории будем обозначать символами

$$Th,\ Th^1,\ Th^2, \ldots .$$

Тот факт, что $Y$ получается из высказываний теории $Th$ по упомянутым правилам, будем записывать символом

$$Th \rightarrow Y.$$

Пусть каким-то образом задана область исследования и строятся или в принципе могут быть построены высказывания $X^1, \ldots, X^n$ ($n \geqslant 1$), относящиеся к этой области исследования. Пусть $t^1, \ldots, t^m$ ($m \geqslant 2$) суть термины, фигурирующие в этих высказываниях. Пусть, далее, $Y^1, \ldots Y^k$ ($k \geqslant 1$) есть некоторая совокупность определений и универсальных высказываний, образованных из общих терминов, а $t_1, \ldots, t_l$ ($l \geqslant 2$) — фигурирующие в них термины.

*D1*. $Y^1, \ldots, Y^k$ образуют теорию относительно $X^1, \ldots,$ $\ldots, X^n$, если и только если

$$Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^k \rightarrow X^1, \ldots, Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^k \rightarrow X^n.$$

Мы определили теорию так, что даже отдельно взятое универсальное высказывание может приобрести функции теории, если оно регулярно используется в качестве средства получения высказываний. Что же касается конкретных наук, то не любые комплексы универсальных высказываний удостаиваются чести именоваться теориями. Но при этом к теориям предъявляются еще некоторые внелогические требования.

*D*2. Высказывания, входящие в данную теорию, разделяются на исходные (первичные) и производные. Исходные просто принимаются как нечто данное, производные же выводятся посредством исходных.

В число исходных утверждений теории могут включаться:

1) утверждения, которые могут быть получены (и получаются) и проверены независимо от построения данной теории и от прочих ее утверждений (в частности, это могут быть результаты наблюдений); в частности, в число исходных утверждений теории могут входить какие-то из $X^1, \ldots, X^m$;

2) утверждения, представляющие собою трансформации определений первичных терминов;

3) допущения.

*D*3. Термины, фигурирующие в данной теории, точно также разделяются на исходные (первичные) и производные. Исходные термины суть термины, не определяемые друг через друга и фигурирующие в исходных утверждениях, а производные — термины, определяемые через исходные.

В число исходных терминов могут включаться:

1) термины, смысл которых может быть установлен независимо от теории (от других ее терминов); это могут быть термины, смысл которых считается первично ясным, разъясняется на примерах, определяется с помощью терминов из других разделов науки; среди них могут быть какие-то из $t^1, \ldots, t^m$; в число исходных терминов могут входить термины из других областей науки;

2) термины, смысл которых определяется исходными утверждениями.

Различая исходные и производные термины и высказывания, мы не утверждаем, что во всех случаях построения теорий сразу задаются все исходные термины и высказывания. Теория может создаваться так, что не накладывается никаких априорных ограничений на число исходных терминов и высказываний, и последние могут вводиться по мере надобности в ходе развертывания теории. Такого рода теории можно назвать открытыми в отличие от закрытых, у которых исходный базис как-то ограничен ($D4$).

$D5$. Если $Y^1, \ldots, Y^r$ суть исходные утверждения данной теории и $Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^r \vdash Z$, то $Z$ есть внутреннее следствие исходных утверждений теории. Если $\sim (Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^r \vdash Z)$, $\sim (W \vdash Z)$, $\sim (Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n \vdash W)$ и $Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^r \cdot W \vdash Z$, то $Z$ есть внешнее следствие данной теории.

$D6$. Если $t_1, \ldots, t_к$ суть исходные термины, $t^i$ определяется через них, и при этом не используются другие термины, то $t^i$ есть внутренний производный термин теории. Если же для определения $t^i$ помимо $t_1, \ldots, t_к$ требуется еще какая-то совокупность терминов, не определяемых через $t_1, \ldots, t_к$, то $t^i$ есть внешний производный термин теории.

Вопрос о том, включать или не включать внешние универсальные следствия и внешние производные термины в структуру данной теории, принципиальной роли не играет. Практически в науках складываются конструкции, содержащие универсальные внешние и внутренние следствия исходных утверждений (а также внешние производные термины) и рассматриваемые в качестве теорий.

Аксиоматические теории суть закрытые теории. Частный случай аксиоматических теорий — теории, исходные утверждения которых суть определения первичных терминов. Частный случай теорий — теории, имеющие целью экспликацию понятий данной области науки. Так называемые гипотетико-дедуктивные теории точно так же суть частный случай теорий в нашем смысле.

Правила, по которым вводятся производные термины и получаются производные утверждения (развертывается теория), суть прежде всего правила логики. Однако здесь нужно сделать два замечания. Во-первых, в самой логике при определении класса правил вывода нельзя предполагать данными сами эти правила. Да в этом и нет необходимости: достаточно указать некоторые правила, посредством которых из данных правил логики получаются новые. Поэтому при построении ряда логических теорий точно фиксируют правила вывода, посредством которых из исходных утверждений получаются производные. Во-вторых, в ряде наук (в математике, физике, лингвистике и т. д.) некоторые теории строятся путем присоединения их исходных утверждений к тому или иному логическому исчислению. Этот шаг оправдан лишь постольку, поскольку требуется точно определить класс правил вывода, а интуитивные представления о последних не всегда надежны. При этом само логическое исчисление не становится частью строящейся теории (например, исчисление предикатов не есть часть арифметики), оно остается лишь средством ее развертывания.

К числу правил развертывания теории относятся также правила оперирования терминами, имеющие общий характер (общие всем наукам), и прежде всего — правила математики. Поскольку они всеобщи, их можно рассматривать на тех же основаниях, что и правила логики, а именно — как субъективные средства получения знаний, как особого рода навыки. Вместе с тем, их определения правомерно рассматриваются как утверждения, благодаря которым получаются внешние следствия теории.

*D7*. Если $Y^1, \ldots, Y^k$ суть утверждения данной теории, $Z^1$ есть некоторое утверждение, полученное в данной области исследования, и $Z^2$ получается из $Y^1, \ldots, Y^k$, $Z^1$ (по правилам логики и математики), то получение $Z^2$ есть получение его из $Z^1$ посредством данной теории (предполагается, что получить $Z^2$ тем же путем из одного только $Z^1$ нельзя).

## § 2. Теоретические допущения

Среди исходных утверждений теории возможны допущения, которые либо вообще невозможно проверить сами по себе, либо противоречат эмпирическим фактам. Принятие их оправдывается тем, что благодаря им становится возможной дедукция в данной области науки и получаются нужные следствия. Эти допущения в своей основе суть абстракции, т. е. решения не принимать во внимание какие-то признаки исследуемых объектов или принимать во внимание только такие-то признаки объектов. Например, все объекты данного класса могут приниматься как различающиеся только по положению в пространстве, как абсолютно независимые друг от друга и т. п. Очевидно, намерения исследователя не имеют значений истинности. Их нельзя подтвердить или опровергнуть. Их можно только оправдать или нет в зависимости от их последствий. Но из намерений нельзя делать выводы. Поэтому им придают форму высказываний и считают истинными. И хотя они сами по себе могут быть заведомо ложными, неопределенными и даже непроверяемыми, получаемые с их помощью следствия могут считаться истинными.

К числу теоретических допущений относятся общие утверждения, именуемые «общими законами природы». Это, например, утверждения «Всякое качественное изменение есть следствие количественных изменений», «Природа непрерывна», «Всякие природные процессы не кончаются мгновенно (имеют некоторую инерцию)» (на этом основывается экстраполяция), «Природа не делает скачков» (на этом основывается интерполяция), «Все происходит скачкообразно», «Всякие природные процессы рано или поздно затухают (прекращаются)», «Всякий прогресс рано или поздно достигает предела», «Все объекты в природе упорядочены», «В природе господствует хаос» и т. д. К этим утверждениям относится все сказанное выше, если они формулируются не как частные допущения, имеющие относительный смысл, а как всеобщие.

Благодаря теоретическим допущениям расширяются возможности дедукции. Получаемые при этом высказывания являются истинными в некотором более или менее широком диапазоне.

## § 3. Свойства и отношения теорий

Свойства и отношения теорий суть свойства и отношения высказываний и терминов, образующих эти теории. Поэтому общие соображения логики по этим вопросам довольно тривиальны и производят впечатление предисловия к чему-то такому, что еще не придумано.

*D1*. Теория считается непротиворечивой, если и только если $\sim(Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^r \cdot W \to Z \cdot \sim Z)$, где $Y^1, \ldots, Y^r$ суть исходные ее утверждения, а $W$ истинно или отсутствует. Логически противоречивые теории встречаются в науке и используются. Это возможно лишь постольку, поскольку в них содержатся непротиворечивые фрагменты, позволяющие получать истинные высказывания. Но вообще обнаружение логических противоречий в теориях является стимулом к их усовершенствованию, т. е. к построению непротиворечивых теорий.

*D2*. Исходное утверждение $Y^i$ данной теории не зависит от других исходных утверждений $Y^{k1}, \ldots, Y^{kl}$, если и только если $\sim(Y^{k1} \cdot \ldots \cdot Y^{kl} \cdot W \to Y^i)$, где $\sim(W \to Y^i)$ и $W$ истинно или пусто. Исходный термин не зависит от других исходных терминов теории, если и только если он не определяется через них. Обнаружение зависимости одних исходных утверждений (терминов) от других является стимулом к «минимизации» исходных элементов теории. Однако зависимость их не ведет сама по себе к недоразумениям, подобным последствиям логической противоречивости.

Как видим, изложенное понимание непротиворечивости и независимости элементов теории есть своего рода «ослабление» общепринятых в логике понятий применительно к интересам описания фактически встречающихся в науке конструкций из высказываний и терминов, называемых теориями. Аналогично обстоит дело с понятием полноты. Здесь возможны такие случаи ($D3$):

1) Задано какое-то множество высказываний $X^1,\ldots$ $\ldots,X^m$, и теория считается полной или неполной (с какими-то дополнительными определениями вроде «интуитивно», «эмпирически», «апостериорно» и т. п.) в зависимости от того, все или не все $X^1,\ldots, X^m$ могут быть получены посредством этой теории (здесь мыслимы градации в зависимости от того, имеются в виду только внутренние или любые следствия теории);

2) заданы какие-то априорные требования, которым должны удовлетворять высказывания данной области науки; и в зависимости от того, все или не все высказывания, удовлетворяющие этим требованиям, получаются посредством данной теории, последняя расценивается как полная или неполная (с некоторым ограничением вроде «дедуктивно», «априорно» и т. п.).

Между теориями имеют место различные взаимоотношения. Частично они определяются как отношения классов получаемых в них и посредством их высказываний и представляют собою обобщения обычно рассматриваемых в логике отношений аксиоматических систем.

*D4.* $Th^1 \subset Th^2$, если и только если для любого $Z$ имеет силу утверждение «Если $Th^1 \rightarrow Z$, то $Th^2 \rightarrow Z$».

*T1.* Если $Y^1,\ldots, Y^n$ суть исходные утверждения $Th^1$, а $X^1,\ldots, X^m$ — исходные утверждения $Th^2$, и при этом $X^1\cdot\ldots\cdot X^m \rightarrow Y^1\cdot\ldots\cdot Y^n$, то $Th^1 \subset Th^2$.

*D5.* $Th^1 \subset\supset Th^2$ (равносильны), если и только если $(Th^1 \subset Th^2)\cdot(Th^2 \subset Th^1)$.

Аналогично можно определить другие отношения (объединения, совместимости и т. д.). Однако взаимоотношения теорий этим не исчерпываются. В частности интерес представляют такие типы отношений.

*D6*. Пусть $Th^1 \rightarrow X^1$ и $Th^2 \rightarrow X^2$. Оба $X^1$ и $X^2$ находятся в диапазоне истинности относительно $|x|$. Однако одно из них оценивается как более точное, менее точное или столь же точное. Аналогичное сравнение возможно для других следствий $Th^1$ и $Th^2$, а из их совокупности складывается некоторая суммарная оценка сравнительной точности теорий. Из сравнения множеств следствий и степеней их точности получаются более сложные отношения.

*D7*. Пусть $t^1$ есть исходный термин $Th^1$, а $t^2$ — $Th^2$. Пусть имеет место $Kt^1 \subset Kt^2$ (или $t^2 \rightarrow t^1$). В таком случае $Th^1$ расценивается как частный случай $Th^2$, если в остальном они не различаются.

Теория $Th^1$ может быть получена путем присоединения к исходным утверждениям $Th^2$ дополнительного независимого утверждения. Очевидно, $Th^2 \subset Th^1$. В неявной форме это может быть сделано путем введения дополнительного термина. И наоборот, одна теория может быть получена из другой путем отбрасывания каких-то элементов ее исходного базиса.

*D8*. Пусть $s^1, \ldots, s^k$ суть термины $Th$. Область значения $Th$ есть $Ks^1 U \ldots UKs^k$. Связь отношения множеств следствий $Th^1$ и $Th^2$ и отношений областей их значения выясняется в соответствии с общими принципами логики.

Теории сравниваются также по множествам и по характеру (по степени точности, приближения и т. п.) высказываний, которые получаются в данной области науки посредством данных теорий. Возможны случаи, когда в числе исходных утверждений $Th^1$ и $Th^2$ могут быть соответственно $X$ и $Y$ такие, что $\sim (X \cdot Y)$, но посредством этих теорий в данной науке получаются сходные множества высказываний. В основе этого явления лежит то обстоятельство, что возможны эмпирические высказывания $X \rightarrow (R)\ Z$ и $Y \rightarrow (R)\ Z$ такие, что $\sim (X \cdot Y)$.

## § 4. Теория и опыт

Теории изобретаются для того, чтобы получать нужные знания, не прибегая к эмпирическим исследованиям (как замена последних). Это особенно важно в случае осуществления прогнозов, когда эмпирическое исследование в принципе невозможно. Однако само изобретение теорий предполагает некоторые результаты эмпирических исследований, отправляется от них. Кроме того, в процессе разработки теории используются самые разнообразные средства исследования вплоть до наблюдений и экспериментов. В конечном итоге совпадение высказываний, получаемых посредством теорий, с эмпирическими данными оправдывает теории или заставляет их отбросить как неэффективные или даже вредные (ведущие к ошибочным результатам).

Если обнаруживаются такие случаи, что получаемые в теории или посредством теории высказывания не совпадают с результатами эмпирических исследований (оказываются вне диапазона истинности), то сложившаяся ситуация не образует никакого логического противоречия.

После того, как теория построена, она используется как частная теория вывода из высказываний данной области науки. Употребляют выражения «теоретическое подтверждение», «теоретическое обоснование», «опытное подтверждение теории» и т. п. Все эти и подобные им выражения (в более или менее неясном смысле) фиксируют взаимоотношения высказываний, получаемых теоретически (в теории и посредством ее) и эмпирически.

## § 5. Теория и формальная система

Формальная система строится так: задается некоторое множество первичных объектов, указываются другие объекты, с помощью которых из них получаются новые объекты, и правила образования последних, определяется некоторое подмножество объектов, считаемых как-то отмеченными, и указываются правила получения из них других отмеченных объектов. Это не есть теория, поскольку в формальной системе нет терминов и высказываний (в нашем смысле). Теория может получиться лишь благодаря интерпретации формальной системы, при которой ее объекты рассматриваются как термины, высказывания и логические знаки. Причем, интерпретация подбирается с таким расчетом, чтобы получилась теория, удовлетворяющая требованиям истинности.

Когда говорят о формализации теории, то часто имеют в виду совершенно различные вещи: 1) отвлечение от смысла терминов теории с целью исследования ее логических достоинств; 2) аксиоматизацию; 3) изобретение такой формальной системы, в результате интерпретации которой получилась бы теория, равносильная данной.

Между теориями, между теорией и формальной системой и между формальными системами могут быть установлены отношения модели и оригинала.

## § 6. Недедуктивные принципы

Существенную роль в построении теорий играют так называемые недедуктивные принципы, которые обычно не формулируются явно. Это суть принципы, регламентирующие последовательность рассмотрения объектов исследуемой предметной области, выбор исходного пункта для этого, отыскание исходных понятий и утверждений и т. д. В логической терминологии соответствующие вопросы разработаны слабо. И причина этого состоит несколько в том, что логики мало занимались ими, сколько в самих этих вопросах: решение их зависит от особенностей исследуемой предметной области (и соответствующей науки) и составляет элемент исследования в этой области, а не в области логики. Те же общие схемы и рекомендации, которые логика в настоящее время способна сформулировать на этот счет, имеют весьма ничтожное эвристическое значение.

# УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЛОГИКИ

## § 1. Сомнения в универсальности логики

Существует мнение, будто законы (утверждения) логики не являются универсальными, т. е. имеются случаи, когда один и тот же закон логики в одной области науки ведет к правильным результатам, а в другой — к ошибочным; будто законы логики имеют исключения, зависят от предметной области. Для подкрепления этого мнения (помимо общих пространных соображений) ссылаются на вполне определенные факты. Еще со времени Гегеля идет традиция, отвергающая закон противоречия в отношении переходных состояний объектов. В современной логико-философской литературе к этому присоединяют ограничения на закон исключенного третьего и двойного отрицания в интуиционистской (и конструктивной) логике, а также на законы коммутативности и дистрибутивности в «квантовой логике».

Если логика действительно не является универсальной, единой для всех наук, то ее положения не имеют априорной силы для наук, и вопрос о ее использовании в них оказывается сомнительным. Но к счастью для логики рассматриваемое мнение есть плод недоразумения.

Уместно спросить:

1) Почему именно такие-то законы логики считаются неуниверсальными, а не другие?

2) Могут ли встретиться случаи, когда и другие законы логики окажутся неуниверсальными?

3) Имеются ли все-таки законы логики, являющиеся универсальными?

4) Где грань между универсальными и неуниверсальными законами логики?

Ответить на подобные вопросы несхоластическим образом невозможно. Законы логики суть утверждения, описывающие (определяющие) свойства определенного рода знаков и содержащих эти знаки знаковых структур. Они суть утверждения о знаках, а не о тех природных предметах, которые обозначаются этими знаками. Они не несут никакой информации о предметах, к которым относятся термины и высказывания. Даже такие утверждения логики, как «$X$ или не-$X$», «Невозможно, чтобы было $X$ и не -$X$» и т. п. принимаются вовсе не потому, что таковы предметы, отражаемые в $X$, а потому, что таковы свойства знаков «или», «и», «не». Законы логики по самой своей природе универсальны, не имеют исключений, не зависят от особенностей той или иной области. От этих особенностей зависит то, какие именно законы из множества возможных законов логики будут использоваться. Но это ничего общего не имеет с концепцией неуниверсальности логики.

Что касается «фактов», которые якобы подтверждают эту концепцию, то не представляет труда показать, что они суть результат смешения различных логических форм.

## § 2. Примеры «неуниверсальности» логики

Возьмем отрицание закона противоречия в отношении переходных состояний объектов («парадокс изменения»). Получается этот парадокс так: помимо состояний, когда $s \leftarrow P$ и $s\urcorner \leftarrow P$ ($s \leftarrow E$ и $s\urcorner \leftarrow E$), допускается третье состояние, в отношении которого верно $\sim (s \leftarrow P) \cdot \cdot \sim (s\urcorner \leftarrow P)$ (соответственно $\sim (s \leftarrow E) \cdot \sim (s\urcorner \leftarrow E)$). Однако запись состояний, запись допущения третьего состояния и последующее рассуждение осуществляются в рамках системы утверждений двузначной логики. Допускается по меньшей мере трехзначность высказываний, а рассуждение идет по правилам логики, исключающим само это третье состояние. В самом деле, состояние, когда $s\urcorner \leftarrow P$, записывают как $\sim (s \leftarrow P)$, ибо не различают $\urcorner$ и $\sim$. Допущение относительно третьего состояния записывается в форме $\sim (s \leftarrow P) \cdot \sim \sim (s \leftarrow P)$. А так как $\sim \sim (s \leftarrow P) \vdash (s \leftarrow P)$, то получается $\sim (s \leftarrow P) \cdot (s \leftarrow P)$. Аналогично получается $\sim (s \leftarrow E) \cdot (s \leftarrow E)$. Таким образом, получается, что для некоторых высказываний $X$ будет верно $\sim X \cdot X$. Но как мы видели, это заключение есть результат ошибки: на самом деле $s\urcorner \leftarrow P$ и $s\urcorner \leftarrow E$ не всегда совпадают с $\sim (s \leftarrow P)$ и $\sim (s \leftarrow E)$, а $\sim (s\urcorner \leftarrow P) \vdash (s \leftarrow P)$ и $\sim (s\urcorner \leftarrow E) \vdash (s \leftarrow E)$ неверны в общем случае (не верны именно потому, что допускаются случаи $s? \leftarrow P$ и $s? \leftarrow E$, фиксирующие, в частности, переходные состояния объектов).

Сходным образом обстоит дело с законом исключенного третьего и законом снятия двойного отрицания в интуиционистской логике. Если допускается возможность $s? \leftarrow P$ и $s? \leftarrow E$, то в общем случае неверны $(s \leftarrow P) : (s\urcorner \leftarrow P)$, $(s \leftarrow E) : (s\urcorner \leftarrow E)$, $\sim(s\urcorner \leftarrow P) \vdash (s \leftarrow P)$ и $\sim (s\urcorner \leftarrow E) \vdash (s \leftarrow E)$. Если теперь рассматривать $\urcorner$ как $\sim$, то получится, что не всегда верны $(s \leftarrow P) : \sim (s \leftarrow P)$, $(s \leftarrow E) : \sim (s \leftarrow E)$, $\sim \sim (s \leftarrow P) \vdash (s \leftarrow P)$ и $\sim \sim (s \leftarrow E) \vdash (s \leftarrow E)$, что ошибочно. Если же ввести какую-то новую форму отрицания (допустим $\lrcorner$), охватывающего свойства $\sim$ и $\urcorner$, то получим верные утверждения о неприемлемости $X : \lrcorner X$ и $\lrcorner \lrcorner X \vdash X$. Но это ни в какой мере не будет затрагивать универсальности утверждений $X : \sim X$ и $\sim \sim X \vdash X$, являющихся частью определения знаков: и $\sim$.

Те же результаты получаются, если смешивают ложность с отрицанием, т. е. явно или неявно принимают $[X] \leftarrow v^4 \dashv \vdash \sim X$. Поскольку $([X]\urcorner \leftarrow v^4) \dashv \vdash \sim ([X] \leftarrow v^4)$ и $\sim ([X] \leftarrow v^4) \vdash ([X] \vdash (v^1 : v^2 : v^3))$, то не всегда верно $\sim ([X] \leftarrow v^4) \vdash ([X] \leftarrow v^1)$ и, следовательно, $\sim ([X] \leftarrow v^4) \vdash X$. Приняв $([X] \leftarrow v^4) \dashv \vdash \sim X$, получим, что не всегда верно $\sim \sim X \vdash X$. Но это ошибочно, так как $\sim X \vdash ([X] \leftarrow v^4)$ не всегда верно (если $[X] \leftarrow v^2$, то $[\sim X] \leftarrow v^1$, а $[[X] \leftarrow v^4] \leftarrow v^4$). Аналогично из того, что не всегда верно $([X] \leftarrow v^1) : ([X] \leftarrow v^4)$, ошибочно получается отрицание универсальности $X : \sim X$, поскольку принимают $\sim X \dashv \vdash ([X] \leftarrow v^4)$. Возможны и другие варианты рассуждений такого рода, не меняющие сути дела.

Точно так же на смешении различных логических форм базируется мнение, будто на законы коммутативности и дистрибутивности для конъюнкции и дизъюнкции ($X \cdot Y \vdash Y \cdot X$, $X \vee Y \vdash Y \vee X$ $(X \vee Y) \cdot Z \vdash X \cdot Z \vee Y \cdot Z$, $X : Y \vdash Y : X$ и т. д.) должны быть наложены ограничения в области квантовой механики. Весьма возможно, что для описания соотношений объектов в области квантовой механики должны быть введены какие-то логические знаки, которые будут частично сходны со знаками $\cdot$, : и $\vee$, но частично будут от них отличаться (например, для них не будут по самим их определениям иметь силу законы, аналогичные законам коммутативности и дистрибутивности для $\cdot$, :, $\vee$). Но это вовсе не означает того, что упомянутые законы неуниверсальны. Если мы по соглашению вводим знак $\cdot$ таким, что $X \cdot Y \vdash Y \cdot X$, то нелепо затем искать случаи, когда это утверждение неверно. Но если мы для некоторого знака (допустим, $\cdot\cdot$) считаем неприемлемым $X \cdot\cdot Y \vdash Y \cdot\cdot X$, то этот знак тем самым полагается отличным от знака $\cdot$. Нет никаких законов логики, которые приемлемы в области макромира и неприемлемы в области микромира. Возможны лишь логические знаки, удобные при описании объектов микромира и отличные от уже известных в логике знаков. Но утверждения, определяющие свойства этих знаков, будут точно также универсальными.

Возьмем такой пример. Пусть соотношения между событиями $|x|$ и $|y|$ таковы, что: 1) если сначала осуществляется $|\neg x| \Rightarrow |x|$, то затем возможно $|\neg y| \Rightarrow |y|$ и возможно $|x \cdot y|$; 2) если же сначала осуществляется $|\neg y| \Rightarrow |y|$, то затем невозможно $|\neg x| \Rightarrow |x|$ и невозможно $|x \cdot y|$. Примеры такого рода в макромире встречаются не менее часто, чем в микромире. Можно ввести особый логический знак, учитывающий такого рода соотношения событий и по определению не обладающий, очевидно, свойством коммутативности. Возможности для изобретения подобных знаков не ограничены, лишь бы были для этого достаточно серьезные причины и удовлетворялись соображения целесообразности.

## § 8. Многозначная логика и универсальность логики

Ссылки на многозначную логику при «обосновании» тезиса неуниверсальности логики лишены какого бы то ни было смысла. Действительно, можно построить многозначную логическую систему так, что некоторые тавтологии («законы») двузначной логики не будут тавтологиями в данной многозначной логике (трехзначные логики Лукасевича и Гейтинга, например). Однако, такую многозначную систему можно придумать для любой тавтологии двузначной логики. Кроме того, само выражение «такая-то тавтология двузначной логики не является тавтологией в такой-то многозначной логике» нуждается в пояснении.

Примем следующее определение:

*D1*. Пусть $F^n$ $(p^1, \ldots, p^m)$ (где $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$) есть функция некоторой многозначной логики. Если в соответствующей ей матрице (в таблице истинности) вычеркнуть все значения истинности, кроме двух, соответствующих значениям двузначной логики, и при этом получившаяся матрица (таблица) будет матрицей некоторой функции $F^2$ $(p^1, \ldots, p^m)$ двузначной логики, то $F^n$ будем называть многозначным аналогом для $F^2$, а $F^2$ — двузначным аналогом для $F^n$ (функции $F^2$ и $F^n$ суть аналогичные функции)

*D2*. Пропозициональная формула двузначной (многозначной) логики является аналогом (или аналогичной) пропозициональной формулы многозначной (двузначной) логики, если и только если одна из них может быть получена из другой путем замены знаков функций соответствующими знаками аналогичных функций.

Пусть $PL^2$ есть функционально полная система двузначной пропозициональной логики, а $PL^n$ — некоторая многозначная система. Тривиально просто доказываются утверждения.

*T1*. Для любой тавтологии $\alpha^2$ в $PL^2$ может быть построена такая $PL^n$, что $\alpha^n$, аналогичная $\alpha^2$, не будет тавтологией в ней.

*T2*. Если $PL^n$ функционально полна, то для каждой $F^2$ в ней возможны по крайней мере два различных аналога $F_1^n$ и $F_2^n$; для каждой пропозициональной формулы $\alpha^2$ в $PL^2$ возможны по крайней мере две различные аналогичные ей формулы $\alpha_1^n$ и $\alpha_2^n$ в $PL^h$.

*T3*. Для любой тавтологии $\alpha^2$ в $PL^2$ в функционально полной системе $PL^n$ могут быть найдены (определены) такие аналоги входящих в $\alpha^2$ функций, что аналогичная ей $\alpha_1^n$ будет тавтологией в $PL^n$, а $\alpha_2^n$ — нет.

Приведем доказательство *T3*. Все тавтологии $PL^2$ равнозначны, все функции $PL^2$ определимы через $\vee$ и $\sim$. Поэтому достаточно взять формулу $p \vee \sim p$ и построить трехзначные аналоги для $\vee$ и $\sim$. Пусть значения истинности в двузначной логике суть 1 и 3, а в трехзначной — 1, 2 и 3. Тавтология в обоих случаях пусть принимает всегда значение 1. В двузначной логике $\vee$ и $\sim$ определяются так: 1) $p \vee q = min\,(p, q)$; 2) если $p = 1$, то $\sim p = 3$;

если $p = 3$, то $\sim p = 1$. В трехзначной логике определение $\vee$ остается то же, так что трехзначная дизъюнкция явно есть аналог двузначной. Что же касается отрицания, то возможны два трехзначных его аналога. Первый аналог получается путем дополнения к определению 2 такого пункта: a) если $p = 2$, то $\sim p = 2$. Второй аналог получается путем дополнения к определению 2 такого пункта: b) если $p = 2$, то $\sim p = 1$. Теперь легко можно убедиться в том, что трехзначная $p \vee \sim p$ будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть второй аналог двузначного, и не будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть первый аналог двузначного.

## § 4. Различие логических систем

Не является аргументом в пользу тезиса неуниверсальности логики и факт множественности логических систем. Мы оставляем в стороне различие точек зрения, способностей и интересов логиков, различие интерпретаций логических исчислений, различие направлений в логике, исторический прогресс и прочие общеизвестные вещи. Возьмем наиболее интересный для нас случай: имеются два логических исчисления; они интерпретируются оба как логические теории, претендующие на описание свойств одних и тех же логических знаков; однако множества доказуемых в них формул (и, значит, множества допускаемых ими правил логики) не совпадают. Если дело обстоит именно таким образом, то правильный вывод из этого факта может быть только такой: эти системы определяют различные наборы логических знаков; последние различаются по крайней мере одним логическим знаком.

Примером такого рода логических систем являются классическое и интуиционистское (конструктивное) исчисления высказываний. Они оба претендуют на то, чтобы давать определение свойств знаков «и», «или» и «не». Однако в них фактически определяются различные отрицания (по объему доказуемых формул без отрицания эти исчисления не различаются): не все, что верно для классического отрицания, верно для интуиционистского (последнее уже классического). И неверно думать, что имеется некое природное отрицание, которое можно познать с различной степенью глубины, полноты и точности подобно тому, как познают атомы, общества, животных и т. п., и свойства которого «интуиционисты» постигли лучше, чем «классики» (или наоборот). Прогресс здесь имеет место. Но он состоит в том, что применительно к некоторым потребностям познания отрицание дифференцировалось, и для различных его форм построены логические системы, определяющие их свойства.

Различие логических систем (если, конечно, последние не являются вариациями на одну и ту же тему) есть показатель расширения и обогащения аппарата логики, показатель появления новых логических средств (в частности — путем дифференциации, ограничений и т. п. имеющихся). Но это ни в коем случае не есть показатель того, что одни и те же законы логики верны в одних областях науки и неверны в других.

В этой связи надо заметить, что стремление представить классическую математическую логику в качестве единого средства решения любых проблем логической теории научных знаний (т. е. в качестве единой концепции логики вообще) оказалось неправомерным. Во многих случаях использование ее дало лишь чисто иллюстративный эффект, породило парадоксальные ситуации и тупики. Так что ближе к истине будет оценка классической математической логики лишь как одного из средств логической теории научных знаний и, при условии соответствующих интерпретаций, как одного из ее разделов. В результате критики концепции универсальности логики по тем направлениям, о которых речь шла выше, рухнула концепция, согласно которой классическая логика одинаково пригодна для решения всех проблем логической теории научных знаний (и «универсальна» в этом смысле). Разработка логики по этим направлениям, однако, есть разработка новых разделов универсальной (в определенном выше смысле) логики, — факт, с точки зрения истории науки не содержащий в себе ничего удивительного.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для современной логической теории научных знаний характерны следующие два недостатка:

1) абсолютизация классической математической логики, т. е. стремление представить ее как средство, пригодное для решения любых проблем теории научных знаний; если происходит отказ от классической концепции логики, то аналогичная судьба постигает другую концепцию (например, интуиционистскую теорию дедукции рассматривают как замену классической);

2) шаблонность в решении разнообразных проблем теории научных знаний, стремление сами эти проблемы формулировать и рассматривать лишь в том виде, в каком становится возможным воспользоваться привычными методами логики.

Следствием этих недостатков явилось то, что исследование многих проблем теории научных знаний зашло в тупик и породило «парадоксальные» ситуации, а большая часть результатов оказалась чисто иллюстративной: эти результаты отлично демонстрируют характер методов логики, но еще не представляют собою разделов некоторой единой и систематически построенной науки о научных знаниях.

По нашему мнению лишь с помощью разнообразных логических исчислений, методов, концепций, направлений и т. п. можно построить теорию научных знаний, отвечающую практике современной науки. А для этого сама проблематика логики должна быть существенным образом расширена и в какой то мере переориентирована сравнительно со сложившейся в логике традицией. Выше мы пытались показать, какие возможности для этого обнаруживаются уже при анализе самых фундаментальных понятий и принципов логики, если последние рассматривать как средства описания свойств научных знаний.

# О ЛОГИЧЕСКИХ РАБОТАХ А. А. ЗИНОВЬЕВА

Александр Александрович Зиновьев — большое явление русской культуры второй половины XX века.

Человек ренессансного таланта — философ, социальный теоретик, глубокий исследователь современной цивилизации, писатель, художник, публицист, общественный деятель, — он прожил сложную, драматическую жизнь и остался верным своим убеждениям.

Однако широкая публика не всегда знает, что А. А. Зиновьев начинал свои исследования с логики. Именно эти проблемы были в течение длительного времени в центре его интересов. В этой области им высказано множество идей, некоторые из которых были сразу же подхвачены коллегами в нашей стране и за рубежом, другие первоначально были не поняты, хотя постепенно стали использоваться (нередко без ссылки на автора), третьи все еще ожидают признания.

Я хочу подчеркнуть, что логика была не просто той областью, в которой А. А. Зиновьев начинал свою исследовательскую деятельность и которую он затем оставил ради других занятий. В действительности логика лежит в основе всех его социальных и философско-этических построений. Не случайно одна из его важнейших книг называется «Логическая социология». Но саму логику он понимал по-своему, нередко в противоречии с тем, что считалось общепринятым.

Для А. А. Зиновьева смысл логики не в конструировании формальных исчислений, а в использовании формальных методов для выработки приемов научного познания. Так было начиная с первых его работ, посвященных исследованию логического метода в «Капитале» К. Маркса и кончая работами по логической физике и логической социологии. Именно этот смысл имеют работы А. А. Зиновьева по комплексной логике. В последние годы жизни он разрабатывал программу интеллектологии, которая должна объединить логику, гносеологию и онтологию.

Вклад А. А. Зиновьева в логику значителен и далеко не освоен современными исследователями. Многие поставленные им проблемы не только не исчезли, а стали более острыми. Многие его идеи исключительно актуальны. Я надеюсь, что переиздание основных логических работ Александра Александровича привлечет к ним то внимание, которое они заслуживают.

*Академик В. А. Лекторский*

# СОДЕРЖАНИЕ

ББК 87.1 87.22 87.4

**Зиновьев Александр Александрович**

**Основы логической теории научных знаний** / Вступ. ст. В. А. Лекторского. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 264 с. (Из наследия А. А. Зиновьева.)

Исследования научных знаний в рамках понятий и методов логики образуют логическую теорию научных знаний. В книге выдающегося отечественного мыслителя А. А. Зиновьева дается систематизированное построение той концепции логической теории научных знаний, которая по отдельным ее проблемам была намечена автором в ряде ранее опубликованных работ. Основная цель книги — дать по возможности простое изложение самих идей и принципов, которые автору представляются перспективными для теории научных знаний.

Книга рекомендуется философам, логикам и методологам науки, студентам соответствующих специальностей, а также всем, кто интересуется проблемами логики и философии науки.

*Ответственный редактор*
*доктор философских наук П. В. Таванец*

Издательство ЛКИ. 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 16,5. Зак. № 3508.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-382-01171-4**





8769 ID 112148

9 785382 011714

# Александр Александрович ЗИНОВЬЕВ

## (1922–2006)

Всемирно известный логик, социолог, писатель, публицист. Родился в деревне Пахтино Чухломского района Костромской области. Участник Великой Отечественной войны с первого до последнего дня, удостоен боевых наград. В 1951 г. окончил философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, затем там же аспирантуру. В 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию «Логика "Капитала" Маркса»; через шесть лет — докторскую диссертацию «Философские проблемы многозначной логики». Они снискали автору репутацию яркого, смелого, независимого ученого.

С 1959 по 1976 гг. А. А. Зиновьев — научный сотрудник Института философии АН СССР; одновременно в 1963–1969 гг. — профессор, заведующий кафедрой логики философского факультета МГУ. Разработал оригинальную концепцию логики (комплексная логика). Опубликовал ряд монографий по логике и методологии науки («Философские проблемы многозначной логики», «Логика высказываний и теория вывода», «Основы логической теории научных знаний», «Комплексная логика», «Логика науки», «Логическая физика»). Многие из них переведены на иностранные языки. Получил признание в международном научном сообществе как один из крупнейших логиков XX века.

Параллельно занимался изучением реального коммунизма, построенного в Советском Союзе. Результатом этих исследований стали вышедшие за рубежом социологические романы «Зияющие высоты» (1976) и «Светлое будущее» (1978). Они имели огромный резонанс во всем мире.

После выхода этих книг А. А. Зиновьев был лишен советского гражданства и выслан вместе с семьей из СССР; 21 год жил в Мюнхене. В период вынужденной эмиграции разрабатывал логику и методологию социального познания, создал теорию коммунистического строя, теорию формирующегося на Западе сверхобщества. Он стал первым, кто с научных позиций подверг критике горбачевскую перестройку, точно предсказал ее исход, проанализировал постсоветский этап в новейшей истории России. Удостоен ряда научных наград и званий, включая премию А. де Токвиля — высшую международную премию в области социологии. А. А. Зиновьев — единственный в России обладатель этой премии. Активно занимался публицистической деятельностью. Всего им написано около 50 книг и сотни статей.

В 1999 г. А. А. Зиновьев вернулся в Москву. В последние годы он активно вел научную работу, выпустил ряд книг, в числе которых «Очерки комплексной логики» (URSS, 2000), «Логическая социология» (2002) и «Фактор понимания» (2006), преподавал в вузах, занимался общественной деятельностью. А. А. Зиновьев скончался в 2006 году после тяжелой болезни и был похоронен в Москве на Новодевичьем кладбище.

8769 ID 112148

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail:
URSS@URSS.ru